Ihasalo Mikko

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Algebralliset rakenteet I
Kurssikoe 29.3.2023

Taulukkokirjan, laskimen ja muiden apuvälineiden käyttö ei ole sallittua. Muista perustella vastauksesi huolellisesti!

1. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}_4$ laskutoimitus $*$ ehdolla $[a]_4 * [b]_4 = [3ab]_4$. (Pidetään tunnettuna, että laskutoimitus on hyvin määritelty.) Osoita, että laskutoimitus $*$ on liitännäinen. Onko laskutoimituksella $*$ neutraalialkiota?

2. a) Ovatko seuraavat osajoukot ryhmän S_4 aliryhmiä?

$A = \{(1), (1\,3\,4), (1\,4\,3)\}$, $B = \{(1), (1\,3), (2\,4), (1\,3)(2\,4)\}$, $C = \{(1), (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3\,2)\}$

b) Osoita määritelmistä lähtien, että ryhmän G kahden aliryhmän leikkaus on myös ryhmän G aliryhmä.

3. a) Tutkitaan ryhmää $G = \{a, b, c, d, e, f\}$, jolla on seuraava laskutoimitustaulu:

$\cdot$	a	b	c	d	e	f
a	f	d	a	e	b	c
b	e	c	b	f	a	d
c	a	b	c	d	e	f
d	b	a	d	c	f	e
e	d	f	e	a	c	b
f	c	e	f	b	d	a

Laske ryhmän G alkioiden kertaluvut.

b) Osoita yleisesti, että ryhmän alkiolla ja sen käänteisalkiolla on sama kertaluku.

4. a) Ovatko ryhmät $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ja $\mathbb{Z}_4$ isomorfisia keskenään? Entä ryhmät $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ ja $\mathbb{Z}_6$?

b) Osoita, että ryhmät $(\mathbb{Z}, +)$ ja $(\mathbb{Q}, +)$ eivät ole isomorfisia keskenään.