

Algebralliset rakenteet I
Kurssikoe
08.03.2017

Kaikki vastaukset tulee perustella huolellisesti.

1. Olkoon $X = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ kaikkien funktioiden joukko reaaliluvuilta itselleen. Määritellään tähän joukkoon laskutoimitus \oplus seuraavasti: $f \oplus g = h$, missä $h(x) = f(x) + g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $+$ on tavallinen reaalilukujen yhteenlasku.
 - (a) Osoita, että (X, \oplus) on ryhmä.
 - (b) Osoita että $Y = \{f \in X \mid f(0) = 0\} \subset X$ on aliryhmä.
2. Olkoon $A = \{a, b, c\}$ ja olkoon \star joukossa A määritelty laskutoimitus siten että (A, \star) on ryhmä, jonka neutraalialkio on a . Osoita, että A on syklinen ryhmä.
3.
 - (a) Osoita, että jos $[m]_7 = [n]_7$, niin $[3m]_7 = [3n]_7$ kaikilla $n, m \in \mathbb{Z}$.
 - (b) Olkoon $f: \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ määritelty kaavalla $f([n]_7) = [3n]_7$. Osoita, että f on isomorfismi ryhmästä $(\mathbb{Z}_7, +)$ itselleen, eli automorfismi.
4. Ratkaise ryhmässä S_4 yhtälö $(23)x^{-1}(124) = (34)^4$. Kirjoita vastaus sievennetyssä muodossa.