

2. KURSSIKOE  
KOMPLEKSIANALYYSI I  
11.12.2012

2.1. **Tehtävä.** Olkoon  $\gamma_r(t) = r \exp(it)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , missä  $r > 0$  on kiinnitetty. Määrä integraalit

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{\bar{z}}, \quad \int_{\gamma_r} \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 dz \quad \text{ja} \quad \int_{\gamma_r} \frac{\exp(z)}{z^5} dz.$$

2.2. **Tehtävä.** (1) Olkoon  $f$  analyyttinen koko tasossa. Jos on olemassa  $M > 0$  siten, että  $|f(z)| > M$  kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ , niin osoita, että  $f$  on vakio koko tasossa.

(2) Olkoon  $f$  analyyttinen koko tasossa. Jos epäyhtälö  $|f'(z)| \leq |z|$  on voimassa kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ , niin mitä tiedät funktiosta  $f$ ?

(3) Olkoon  $f$  analyyttinen alueessa  $A$ , johon suljettu origokeskinen yksikkökierros  $\overline{\mathbb{D}}(0, 1)$  kuuluu. Oletetaan, että  $|f(z^2)| \geq |f(z)|$  kaikilla  $z \in \mathbb{D}(0, 1)$ . Osoita, että  $f$  on vakio kiekossa  $\mathbb{D}(0, 1)$ .

2.3. **Tehtävä.** (1) Olkoon  $f$  analyyttinen alueessa  $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{z_0\}$  ja olkoon funktiolla  $f$  toisen kertaluvun napa pisteessä  $z_0$ . Osoita, että

$$\text{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} \left( f(z)(z - z_0)^2 \right).$$

(2) Määrä integraali

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

2.4. **Tehtävä.** Etsi bijektiivinen konformikuvaus avoimelta origokeskiseltä yksikkökierkolta alueelle  $\{z : \text{Re } z > 0\}$ .