

**KOMPLEKSIANALYYSI I**  
**9.8.2012**

1. LOPPUKOE

1.1. **Tehtävä.** (1) Milloin seuraavat funktiot ovat kompleksisesti derivoituvia? Milloin ne ovat analyyttisiä?

(a)  $f(z) = \bar{z}, z \in \mathbb{C},$

(b)  $g(z) = \bar{z}^2, z \in \mathbb{C}.$

(2) Olkoon  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  kuvaus  $h(z) = 2 \cos z - (1 + i) \exp(iz)$ . Milloin  $h$  on analyyttinen? Milloin  $h$  on konforminen?

1.2. **Tehtävä.** (1) Etsi funktion  $z \mapsto \exp(\exp z)$  reaali- ja imaginaariosat.

(2) Olkoon  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen koko kompleksitasossa. Olkoon  $A$  positiivinen reaaliluku siten, että  $|f(z)| > A$  kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ . Osoita, että funktio  $f$  on vakio.

1.3. **Tehtävä.** Määrää seuraavat integraalit. Mainitse nimeltä periaate, lause tai kaava, jota käytät laskuissasi. Annettujen kiekkojen reunat kierretään myötäpäivään.

$$(1) \int_{\partial D(1/2, 1/2)} \left( \frac{z-2}{2z-1} \right)^3 dz \quad (2) \int_{\partial D(0, 2)} \frac{|z| \sin(\exp z)}{z} dz$$

$$(3) \int_{\partial D(i, 1)} \frac{\exp(z^2)}{(z-i)^2(z+i)^2} dz.$$

1.4. **Tehtävä.** Määrää integraali

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^6 + 1}.$$

1.5. **Tehtävä.** (1) Määrää puolikiekkon  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ ja } \text{Im } z > 0\}$  kuva kuvauksessa  $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ .

(2) Etsi bijektiivinen konformikuvaus, joka kuvaa alueen  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ ja } \text{Im } z > 0\}$  avoimeksi yksikkökiekoksi  $D(0, 1)$ .