

KOMPLEKSIANALYYSI I
13.5.2013

1. LOPPUKOE

1.1. **Tehtävä.** Milloin seuraavat funktiot ovat analyyttisiä?

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{(z + z^{-1})^2},$$

$$(2) \quad g(z) = \frac{z}{\bar{z} - 1305},$$

$$(3) \quad h(z) = 2 \cos z - (1 + i) \exp(iz).$$

Milloin kuvaus h on konforminen?

1.2. **Tehtävä.** (1) Olkoon f analyyttinen koko kompleksitasossa. Osoita, että f on vakiofunktio, jos

$$\operatorname{Re} f = (\operatorname{Im} f)^2.$$

(2) Määrää kaikki kompleksiluvut z , joille

$$\sin z = \frac{12}{5}i.$$

1.3. **Tehtävä.** (1) Olkoon $\gamma(t) = \exp(it)$, $t \in [0, 2\pi]$. Määrää integraalit

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\bar{z}} \quad \text{ja} \quad \int_{\gamma} \frac{1}{3 + 4z} dz \quad \text{ja} \quad \int_{\gamma} \frac{z}{\exp(z)} dz.$$

1.4. **Tehtävä.** (1) Olkoot f ja g analyyttisiä funktioita koko tasossa siten, että $|f(z)| < |g(z)|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Osoita, että on olemassa vakio $\lambda \in \mathbb{C}$ siten, että $f(z) = \lambda g(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

(2) Olkoot $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen ja $M \in \mathbb{R}$ vakio. Mitä tiedät funktiosta f , jos jompi kumpi seuraavista oletuksista on voimassa?

(a) $|f'(z)| \leq |z|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

(b) $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

1.5. **Tehtävä.** Etsi bijektiivinen konformikuvaus avoimelta yksikkökierokelta alueelle

$$\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}.$$