

KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSIN LOPPUKOE
14.6.2012

1. LOPPUKOE

1.1. **Tehtävä.** Milloin seuraavat funktiot ovat analyyttisiä? Milloin kuvaus h on konforminen?

(1) $f(z) = x^2 + 2xy + y^2 + i(x^2 - 2xy - y^2)$, missä $z = x + iy$ ja $x, y \in \mathbb{R}$

(2) $g(z) = \cot z$

(3) $h(z) = 2 \cos z - (1 + i) \exp(iz)$.

1.2. **Tehtävä.** (1) Etsi funktion $z \mapsto \exp(\exp z)$ reaali- ja imaginaariosat.

(2) Olkoon $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kokonainen funktio. Olkoon N positiivinen kokonaisluku. Olkoot A ja B äärellisiä positiivisia vakioita. Oletetaan, että $|f(z)| \leq A|z|^N + B$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Osoita, että f on polynomi, jonka aste on korkeintaan N .

1.3. **Tehtävä.** Määrää seuraavat integraalit. Mainitse nimeltä periaate, lause tai kaava, jota käytät laskuissasi. Annettujen kiekkojen reunat kierretään myötäpäivään.

(1) $\int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin z}{z^{20}} dz$ (2) $\int_{\partial D(-i,1)} \frac{\exp(z^2)}{(z-i)(z+i)^2} dz$ (3) $\int_{\partial D(0,4)} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz$.

1.4. **Tehtävä.** Määrää integraali

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^8 + 1}.$$

1.5. **Tehtävä.** (1) Etsi suoran $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\}$ kuva kuvauksessa $z \mapsto 1/z$.

(2) Etsi bijektiivinen konformikuvaus avoimelta yksikkökielelta $D(0, 1)$ alueelle $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1 \text{ ja } \operatorname{Im} z > 0\}$.