

1. KURSSIKOE
KOMPLEKSIANALYYSI I
31.10.2011

1.1. **Tehtävä.** (a) Onko funktio $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z \operatorname{Re} z$, missään analyyttinen?

(b) Olkoon f kompleksiarvoinen funktio kiekossa $\mathbb{D}(x, 10)$, missä $x \in \mathbb{R}$. Olkoon funktio g määritelty seuraavasti

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Osoita, että funktio g on analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}(x, 10)$, jos ja vain jos f on analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}(x, 10)$.

1.2. **Tehtävä.** Olkoon $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kompleksiterminen potenssisarja, joka suppenee pisteessä $z_1 \neq 0$. Osoita, että sarja suppenee itseisesti kiekossa $\mathbb{D}(0, |z_1|)$.

1.3. **Tehtävä.** (a) Osoita, että $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

(b) Määrää kaikki kompleksiluvut z , joille

$$\tan z = 2i.$$

1.4. **Tehtävä.** (1) Mitkä kaikki arvot logaritmi $\log(i - z)$ antaa, kun $z = 1$?

(2) Määrää logaritmin $\log(i - z)$ haara, joka ottaa pisteessä 1 arvon $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5\pi i}{4}$.

