

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Convex analysis and optimization I, kevät 2026
Loppuentti 5/3/2026 klo 9:00-12:00

- Vastaa kahteen tehtävistä 1-3 ja kahteen tehtävistä 4-6 (yhteensä 4 tehtävään).
- Voit käyttää kaikkia tällä kurssilla (mukaanlukien harjoitustehtävissä) tai aiemmilla kursseilla esitettyä tuloksia, ellei sinua pyydetä tehtävässä osoittamaan niitä.
- Kaikissa tehtävissä $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ja merkitään $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

1. Olkoot $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Määritellään $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(t) = |\mathbf{t}\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2.$$

Määritä f :n lokaali(t) ja globaali(t) minimoija(t). (7p)

2. Olkoot $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ja $\beta > 0$. Tarkastellaan seuraavaa algoritmia:

Askel 0: Valitse mikä vain $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Askel $k+1$: Määritellään kvadraattinen funktio $g_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$\begin{aligned} g_k(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^{(k)}) + \langle \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)} \rangle + \beta |\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}|^2 \\ &= \beta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + (\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + f(\mathbf{x}^{(k)}), \end{aligned}$$

ja olkoon $\mathbf{x}^{(k+1)}$ funktion g_k globaali minimoija eli

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} g_k(\mathbf{x}).$$

- (i) Kun $k \in \mathbb{N}_0$, määritä $\mathbf{x}^{(k+1)}$ (esitä sille kaava, jossa esiintyvät f , $\mathbf{x}^{(k)}$ ja/tai β mutta ei $\mathbf{x}$). (5p)
- (ii) Yllä oleva algoritmi on yksi kurssilla käsitellyistä algoritmeista (valeasussa). Mikä niistä? (2p)

3. Olkoon $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ jokaisella $k \in \mathbb{N}_0$. Oletetaan, että on olemassa sellainen $C \in (0, 1)$, että

$$\frac{|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*|}{|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*|} \leq C$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$. Olkoon $\epsilon > 0$.

Määritä sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että $|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*| < \epsilon$ kaikilla $k \geq k_0$. (7p)

4. Esitä Newtonin menetelmä yhdessä ulottuvuudessa joko pseudokoodilla tai Python- tai MATLAB-koodilla. Pysäytyskriteerinä kiinnitä $\epsilon > 0$ ja pysäytä algoritmi, jos $|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}| < \epsilon$. (7p)

5. Määritellään $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^4 + x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2 + 1.$$

- (i) Määritä kaikki pisteet, jotta toteuttavat FONCin (ensimmäisen asteen välttämättömyyden ehto). (2p)
- (ii) Onko yksikään kohdassa (i) löydettyistä pisteistä lokaali minimoija? (2p)
- (iii) Onko f alhaalta rajoitettu? (Eli onko olemassa sellaista $c \in \mathbb{R}$, että $f(x_1, x_2) \geq c$ kaikilla $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$?) (3p)

6. Käsitellään funktiota $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, joka määritellään kaavalla $f(x) = (x - 1)^2$. Yritetään löytää f :n yksikäsitteinen globaali minimoija $\mathbf{x}^*$ käyttämällä algoritmia

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha 2^{-k} f'(x^{(k)}),$$

missä f' on f :n derivaatta ja $0 < \alpha < 1$.

- (i) Onko algoritmilla laskevuusominaisuus (eli $f(\mathbf{x}^{(k+1)}) < f(\mathbf{x}^{(k)})$ kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$)? (4p)
- (ii) Onko algoritmi globaalisti suppeneva (eli pätee $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*$ kaikilla $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}$)? (3p)

(Vinkki osioon (ii): muista, että jos $0 < \gamma_i < 1$ kaikilla $i \in \mathbb{N}_0$, niin $\prod_{i=0}^{\infty} (1 - \gamma_i) = 0$ jos ja vain jos $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = \infty$.)
