HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
MAT11004 Differentiaalilaskenta
Moodle-kotitentti
15.12.2020 klo 12:00-15:00

Palauta ratkaisusi sähköisesti Moodlen palautuskansioon klo 15:00 mennessä.

1. Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x-3, & x < -1, \\ 2x, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ -\frac{1}{2}x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

Piirrä ensin kuva tilanteesta.

(a) Tutki, onko f jatkuva pisteessä $x = -1$. (1 p.)

(b) Tutki, onko f jatkuva pisteessä $x = 2$. (1 p.)

Käytä kohdissa (a) ja (b) jatkuvuuden perusmääritelmää. Perustelut voi katsoa kuvasta!

> Jatkuvuuden perusmääritelmä: Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$ sellainen, että $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Funktio f on *jatkuva pisteessä* x_0, jos
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

(c) Osoita joko kohdan (a) tai kohdan (b) havaintosi oikeaksi käyttäen jatkuvuuden (ε, δ)-määritelmää. Voit siis valita itse, kumman kohdan todistat! (4 p.)

> Jatkuvuuden (ε, δ)-määritelmä: Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$ sellainen, että $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Funktio f on *jatkuva pisteessä* x_0, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että
> $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{kun } |x - x_0| < \delta.$$

2. Tarkastellaan yhtälöä $2^x = 3x$.

(a) Osoita, että yhtälöllä on ratkaisu välillä $(0, 1)$. (3 p.)

(b) Tutki, kuinka monta ratkaisua yhtälöllä on välillä $(0, 1)$. (3 p.)

3. Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, kun $x \in \mathbb{R}$.

(a) Määritä funktion f lokaalit ääriarvokohdat ja niiden laatu (eli ovatko minimi- vai maksimikohtia ja ovatko oleellisia ääriarvokohtia). (3 p.)

(b) Tutki funktion f konveksiutta ja konkaaviutta sekä määritä käännepisteet. (3 p.)

4. Olkoon $n \in \mathbb{N}_1$. Osoita, että

$$nx^{n-1}(y - x) \leqslant y^n - x^n \quad \text{kaikilla } 0 \leqslant x \leqslant y.$$

Vihje. Väliarvolause. (6 p.)

Huom! Laskimella tai ohjelmistolla saatu vastaus tai kuva ei missään tehtävässä riitä perusteluksi, lukuunottamatta tehtävän 1 kohtia (a) ja (b), joissa perustelut voi katsoa kuvasta.