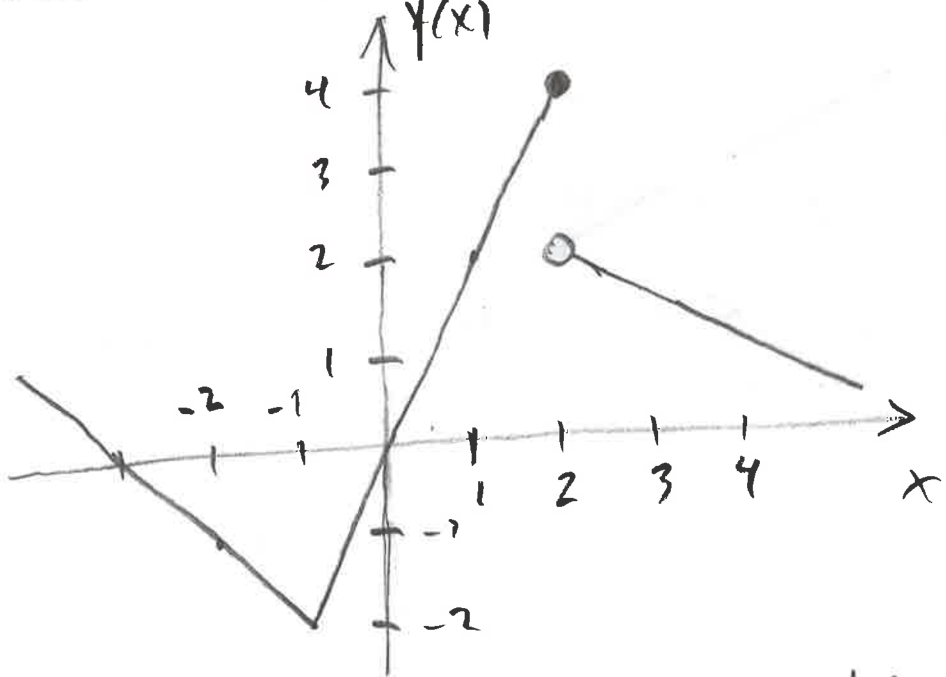
MAT11004 Differentiaalilaskenta
Moodle-kotitentti 15.12.2020 klo 12-15
Ratkaisut ja pisteytys (MK)

1.



(Kuvasta +1p, jos koko tehtävässä ei muuta oikein)

(a) Koska $\lim_{x\to -1} f(x) = -2 = f(-1)$, niin f on jatkuva pisteessä $x=-1$. (+1p)

(b) Koska $\lim_{x\to 2+} f(x) = 2 \neq 4 = f(2)$, niin f ei ole jatkuva pisteessä $x=2$. (+1p)

(c) Kohdan (a) todistus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, 3\}$ (+1p). Kun $|x-(-1)| = |x+1| < \delta$, niin

$$|f(x) - f(-1)| = |f(x) - (-2)| = |f(x)+2|$$

(+1p)

$$\vdots \quad = \begin{cases} |-x-3+2|, & x<-1, \\ |2x+2|, & -1 \le x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |-(x+1)|, & x<-1 \\ |2(x+1)|, & -1 \le x < 2 \end{cases}$$

(+1p.)
$$\le 2|x+1| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (+1p)$$

Näin ollen f on jatkuva pisteessä $x=-1$. $\square$

Kohdan (b) todistus: Valitaan $\varepsilon = 2$.

Olkoon $\delta > 0$. (+1p) Tällöin

$x = 2 + \frac{\delta}{2} \in (2, 2+\delta)$, jolloin

$|x-2| = |2 + \frac{\delta}{2} - 2| = \frac{\delta}{2} < \delta$ (+1p)

ja

$$|f(x) - f(2)| = |-\tfrac{1}{2}(2+\tfrac{\delta}{2}) + 3 - 4|$$
$$= |-1-\tfrac{\delta}{4}-1| = |-2-\tfrac{\delta}{4}| = |2+\tfrac{\delta}{4}| > 2 = \varepsilon.$$
(+1p)

Ei siis löydy lukua $\delta > 0$, jolla ehdosta $|x-2| < \delta$ seuraisi $|f(x)-f(2)| < 2$. (+1p)

Näin ollen f ei ole jatkuva pisteessä $x=2$. $\square$

2. (a) Tarkastellaan funktiota $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^x-3x$, $x\in\mathbb{R}$, joka on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä (koska se on yleisen eksponenttifunktion ja polynomin summa). (+1p)

Nyt $f(0)=2^0-3\cdot 0=1-0=1>0$ ja $f(1)=2^1-3\cdot 1=2-3=-1<0$, joten Bolzanon lauseen perusteella on olemassa $x_0\in(0,1)$ s.e. $f(x_0)=0$. (+1p)

Nyt $f(x_0)=2^{x_0}-3x_0=0 \Leftrightarrow 2^{x_0}=3x_0$, joten yhtälöllä $2^x=3x$ on ratkaisu välillä $(0,1)$. (+1p)

(b) Nyt $f'(x)=2^x\ln 2-3$. (+1p). Koska $0<2^x<2$ ja $0=\ln(1)<\ln(2)<\ln(e)=1$ (sillä $1<2<e$) kaikilla $x\in(0,1)$, niin $0<2^x\ln 2<2$ kaikilla $x\in(0,1)$. Näin ollen $f'(x)=2^x\ln 2-3<0$ $\forall x\in(0,1)$ (+1p) ja f on aidosti vähenevä välillä

(0,1). Näin ollen f:llä on korkeintaan yksi 0-kohta välillä (0,1) eli yhtälöllä $2^x = 3x$ on korkeintaan yksi ratkaisu välillä (0,1). Koska kohdan (a) perusteella yhtälöllä $2^x = 3x$ on vähintään yksi ratkaisu välillä (0,1), niin sillä on näin ollen täsmälleen yksi ratkaisu välillä (0,1). (+1p).

3. (a) Koska f on derivoituva koko $\mathbb{R}$:ssä, niin sen lokaalit ääriarvokohdat löytyvät derivaatan 0-kohdista.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$
$$= 3(x-1)(x-3) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x = 1$ tai $x = 3$. (+1p)

Koska $f'(x) = 3\underbrace{(x-1)}_{<0}\underbrace{(x-3)}_{<0} > 0$, kun $x < 1$,

niin f on aidosti kasvava, kun $x < 1$,

ja koska $f'(x) = 3\underbrace{(x-1)}_{>0}\underbrace{(x-3)}_{<0} < 0$, kun

$1 < x < 3$, niin f on aidosti vähenevä, kun $1 < x < 3$. Näin ollen $x = 1$ on f:n oleellinen maksimikohta. (+1p)

Koska edellä havaittiin, että f on aidosti vähenevä, kun $1 < x < 3$, ja koska $f'(x) = 3\underbrace{(x-1)}_{>0}\underbrace{(x+3)}_{>0} > 0$, kun

$x > 3$, niin f on aidosti kasvava,

kun $x > 3$. Näin ollen $x = 3$ on
f:n oleellinen minimikohta. (+1p)

(b) Funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kaksi kertaa
derivoituva, joten voidaan tutkia
f:n käännepisteitä (Määritelmä 5.6.12)
Nyt $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2) = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$. (+1p) Koska $f''(x) < 0$,
kun $x < 2$, ja $f''(x) > 0$, kun $x > 2$,
niin $x = 2$ on f:n käännepiste. (+1p)
Samasta syystä f on konkaavi,
kun $x \underset{(-)}{\leq} 2$ ja konveksi, kun
$x \underset{(-)}{\geq} 2$. (+1p)

4. Tarkastellaan funktiota $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(z)=z^m$, $m\in\mathbb{N}_1$. Olkoot $0\leq x<y$. Funktio f on jatkuva välillä $[x,y]$ ja derivoituva välillä (x,y). (+1p) Lisäksi $f'(z)=mz^{m-1}$ (+1p), joten väliarvolauseen perusteella on olemassa sellainen $\xi\in(x,y)$, että

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(\xi)\Leftrightarrow\frac{y^m-x^m}{y-x}=m\xi^{m-1}.$$

(+1p)

Näin ollen

$$y^m-x^m=m\xi^{m-1}(y-x)\overset{\xi>x}{>}mx^{m-1}(y-x).$$ (+1p)

Kun $x=y$, on voimassa

$$y^m-x^m=0=mx^{m-1}(y-x)$$ (+1p),

joten

$$mx^{m-1}(y-x)\leq y^m-x^m$$

kaikilla $0\leq x<y$. (+1p) $\square$