

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Differentiaalilaskenta

Tentti

12. 4. 2017

Laskuaikaa 3,5 tuntia

Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \infty.$$

2. Osoita, että yhtälöllä  $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ , ja  $f(0) = 0$  määritelty funktio on derivoituva kohdassa  $x = 0$ .

3. Tarkastellaan ehdoilla  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$  määriteltyä funktiota  $f: [0, 2] \rightarrow [0, \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}]$ . Osoita, että funktiolla  $f$  on aidosti kasvava jatkuva käänteisfunktio  $g: [0, \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}] \rightarrow [0, 2]$ , joka on derivoituva välillä  $]0, \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}[$ . Määritä  $g'(2)$ . (Kannattaa selvittää  $f(1)$ .)

4. Oletetaan, että jatkuva funktio  $f: ]1, 2[ \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa ehdot

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ ja } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty.$$

Osoita, että on olemassa  $c \in ]1, 2[$ , jolle kaikilla  $x \in ]1, 2[$  pätee  $f(x) \leq f(c)$ .

5. Oletetaan, että funktio  $f: ]0, 3[ \rightarrow \mathbb{R}$  on derivoituva koko välillä  $]0, 3[$ . Oletetaan, että  $f'(1) = 4$  ja  $f'(2) = 6$ . Osoita, että on olemassa  $c \in ]1, 2[$ , jolle pätee  $f'(c) = 5$ . Vihje: tutki yhtälöllä  $g(x) = f(x) - 5x$  määriteltyä apufunktiota. Huom: et voi soveltaa Bolzanon lausetta, koska derivaattafunktio  $f'(x)$  ei ehkä ole jatkuva.