

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN OSASTO

Differentiaalilaskenta 2019

Kurssikoe 17.12.2019 klo 12 - 14:30

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet ja laskin.

Jätä koepaperin yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten!

1 Selvitä funktion raja-arvoja koskevien kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3}{4x^5 + 6}$$

Tehtävässä saa käyttää myös tietoa vakiofunktioiden sekä funktion $f(x) = x$ raja-arvoista. Huolellinen perustelu!

2 Tarkastellaan yhtälöllä

$$f(x) = x^2 - \sin x$$

määriteltyä funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Osoita kurssilla käsiteltyjen jatkuvien funktioiden ominaisuuksien avulla, että niiden arvojen joukossa joita f saa, on pienin arvo. Tehtävässä saa pitää tunnettuna, että funktio f on jatkuva.

3 Tarkastellaan yhtälöllä

$$f(x) = x^{2019} + x$$

määriteltyä funktiota $f :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$. Osoita kurssin tietojen avulla, että funktiolla f on aidosti kasvava derivoituva käänteisfunktio $f^{-1} :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$. Määritä käänteisfunktion derivaatta $(f^{-1})'(2)$.

4 Osoita kurssin tietojen avulla, että kaikille $x \geq 4$ pätee epäyhtälö

$$\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1.$$

Kannattaa tarkastella yhtälöllä $f(x) = \frac{1}{4}x + 1 - \sqrt{x}$ määriteltyä apufunktiota.