HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
MAT11004 Differentiaalilaskenta
Ylimääräinen Moodle-kotitentti
Periodi II, syksy 2020

1. Tutki jatkuvuuden (ε, δ)-määritelmän avulla, onko funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ x, & x \geqslant 1, \end{cases}$$
jatkuva pisteessä $x = 1$.

> Jatkuvuuden (ε, δ)-määritelmä: Olkoon $f\colon A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$ sellainen, että $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$ jollakin $r > 0$. Funktio f on *jatkuva pisteessä* x_0, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että
> $$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \text{kun } |x - x_0| < \delta.$$

2. Tarkastellaan yhtälöä $\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} + 1$, kun $x \geqslant 0$. Osoita, että yhtälöllä on ratkaisu. Onko yhtälöllä enemmän kuin yksi ratkaisu?

3. Määritä pisteet $x \in \mathbb{R}$, joissa funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = |x - 1|x^2,$$
on lokaali ääriarvokohta. Selvitä myös ääriarvon laatu (minimi- vai maksimikohta, oleellinen vai ei) näissä pisteissä.

4. Oletetaan, että $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on derivoituva ja
$$|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2$$
kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita, että f on vakio.

Huom! Laskimella tai ohjelmistolla saatu vastaus ei missään tehtävässä riitä perusteluksi.