

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I

2. kurssikoe 13.12.2012

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Selvitä

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 1}{6x + 1}.$$

Perustele väitteesi huolellisesti kurssin tietojen avulla.

2. Määritellään, että $f(0) = 0$ ja

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

kun $x \neq 0$. Osoita, että funktio f on derivoituva kohdassa $x = 0$.

3. Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $]1, 2[$. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \text{ ja että } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty.$$

Osoita, että on olemassa $a \in]1, 2[$, jolle pätee $f(a) = 7$.

4. Määritellään $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee

$$\sinh(x) - \sin(x) \geq 0.$$