

Koe 18.6.2025 10.00-13.00

Tentissä ei saa olla mukana laskinta, taulukkokirjaa tai kirjallista materiaalia paitsi yksi A4-kokoinen sivu vapaasti valittavia muistiinpanoja, jossa max. noin 60 riviä $\times$ 100 merkkiä / rivi

Seuraavassa y on tuntematon, reaaliuuttujasta x riippuva funktio. Yhtälön ratkaisulla tarkoitetaan yleistä ratkaisua tai implisiittistä ratkaisua, mikäli yleistä ratkaisua ei ole saatavissa.

1. Esitä seuraavien differentiaaliyhtälöiden ratkaisut:

$$\text{a) } y''(x) - e^{2x} = 0, \quad \text{b) } y'(x) + e^{2x}y(x) = 0.$$

2. Ratkaise seuraavista differentiaaliyhtälöistä ne, jotka ovat eksakteja:

$$\text{a) } 4x^3y^3 - 3y^4x^2y' = 0, \quad \text{b) } 2xy - 1 + (x^2 + 4)y' = 0.$$

3. Käytä separoituvan tai lineaarisen yhtälön ratkaisumenetelmää annetun alkuarvotehtävän tai yhtälön ratkaisemiseen:

$$\text{a) } y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{\cos x}{x^2}, \quad y(\pi) = 1, \quad \text{b) } y' = \frac{1}{x} \frac{y+1}{y}.$$

4. UKK-puistossa arvioitiin vuonna 2017 olleen 6300 kuukkelia mutta vuoteen 2022 mennessä kanta oli supistunut 5900 yksilöön. Oletetaan, että kuukkelipopulaatio $N(t)$ noudattaa logistista yhtälöä

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right).$$

Parametrin r arvoksi arvioidaan 0,1 kun aikayksikkönä käytetään vuotta. Laske parametrin K arvo ylläolevista tiedoista. (Voit esimerkiksi soveltaa Bernoullin yhtälön ratkaisumenetelmää tai käyttää suoraan luennoilla esitettyä yhtälön ratkaisua.)

5. Käyttämällä sopivia yritteitä ja yhtälöiden lineaarisuutta, ratkaise yhtälöt

$$\text{a) } y'' + 5y = e^{-2x}, \quad \text{b) } y'' + 5y = 6x^2, \quad \text{c) } y'' + 5y = 6x^2 + e^{-2x}.$$