

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Differentiaaliyhtälöt II, kevät 2017

Kurssikoe 9.5.2017

Kokeen kesto on kaksi ja puoli tuntia (2h 30min).

Kokeessa EI SAA KÄYTTÄÄ LASKIMIA eikä taulukkokirjoja.

Ratkaise seuraavat tehtävät 1, 2, 3 ja 4.

1. a) Etsi perusjärjestelmä systeemille

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (2 \text{ pistettä})$$

- b) Ratkaise alkuarvot tehtävä

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ piste})$$

- c) Ratkaise

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6e^{2t} \end{bmatrix} \quad (2 \text{ pistettä})$$

- d) Onko autonomisen systeemin

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

kriittinen piste  $(0, 0)$  stabiili vai epästabiili? (1 piste)

2. Tutkitaan autonomista systeemiä

$$\begin{cases} x'(t) = (x(t) - 4)(1 - y(t)) \\ y'(t) = (x(t) + 1)(x(t) - 4) \end{cases}$$

- a) Mitkä ovat systeemin kriittiset pisteet? (2 pistettä)  
b) Mitkä ovat systeemin radat? (2 pistettä)  
c) Luonnostele piirtämällä systeemin aikakehitys/virtauskuvio. (2 pistettä)  
d) Etsi systeemin linearisointi kriittisissä pisteissä. Mitä voit nyt päätellä kriittisten pisteiden laadusta Poincarén stabiilisuuslauseesta? (2 pistettä)

3. Ratkaise

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (4 \text{ pistettä})$$

4. Tutkitaan differentiaaliyhtälöä

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

missä

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva funktio,
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  on olemassa ja  $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 10$  kaikilla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,
- $f(t, t) = 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Onko olemassa sellaista ratkaisua  $y_1(x)$ , jolla  $y_1(0) = 0$  ja  $y$  ei ole kolmesti derivoituva nollassa (eli  $y_1'''(0)$  ei ole olemassa)? Perustele vastauksesi. (7 pistettä)