

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Fourier analyysi
Kurssikoe 17.12. 2012

$$1 - e^{-(1-\frac{1}{x})^2}$$

$$e^{-(1-\frac{1}{x})^2} \cdot 2(1-\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\hat{f}(x) \hat{g}(x) = (fg)^{\wedge}(x)$$

Laske 4 tehtävää seuraavista.

1. Määritellään $f_n(x) = \sin(nx)$ ja $h_n(x) = n\chi_{[-n,n]}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.
 Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$? Entä suppeneeko jono $(h_n)_{n=1}^{\infty}$?

Suppenevissa tapauksissa määrää k.o. jonon raja-arvo $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:ssa.

2. Oletetaan, että $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Osoita, että konvoluutio $f * g$ on jatkuva, ja että sen Fourier muunnos kuuluu avaruuteen $L^{2012}(\mathbb{R}^d)$.

[Vihje: Voit käyttää luennolla todistettuja tuloksia.]

3. Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Osoita, että

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^2 \leq c_0 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

jollakin vakiolla $0 < c_0 < \infty$.

[Vihje: Kirjoita integraali $\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |f(x)|^2 dx$ kahdella eri tavalla. Vakioksi voi valita $c_0 = 2/\pi$.

Todistamasi epäyhtälö on eräs versio Heisenbergin epätarkkuusperiaatteesta.]

4. Muotoile Poissonin summauskaava, ja osoita sen avulla että

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{2} \frac{e + 1}{e - 1}.$$

[Vihje: Laske funktion $f(x) = e^{-|x|}$ Fourier muunnos.]

5. (i) Valitaan funktio $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, jolle $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 1$.
 Osoita, että silloin jokaisella $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ funktio

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t) dt - \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right) \int_{-\infty}^x \psi(t) dt$$

kuuluu Schwarzin luokkaan $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- (ii) Osoita kohdan (i) havainnon avulla, että jos $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ja (distribuutio)derivaatta $T' = 0$, silloin T = vakiofunktio.