FUNCTIONAL ANALYSIS / FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
EXAM 2, Dec. 16th, 2019/ VÄLIKOE 2, 16.12. 2019
Answers may be written in English, Finnish or Swedish

Kaikissa tehtävissä voit olettaa, että kerroinkunta on reaalilukujen joukko.

1. Onko seuraava bilineaarinen kuvaus koersiivinen $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$:

$$R : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1},$$

missä $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$?

2. Esitä jokin esimerkki kahdesta jatkuvasta lineaarisesta operaattorista $S : X \to X$ ja $T : X \to X$ Banach-avaruudessa X, jotka eivät kommutoi, toisin sanoen $ST \neq TS$. Banach-avaruuden on oltava ääretönulotteinen, mutta muuten voit valita esimerkin vapaasti.

3. Esitä lyhyt perustelu sille, että avaruus $C(0, 1)$ varustettuna L^1-normilla

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

ei voi olla täydellinen. (Käytä hyväksi luennoilla esitettyjä tuloksia. Voit olettaa esim. tunnetuksi, että $\| \cdot \|_1$ ja sup-normi eivät ole ekvivalentteja.)

4. Määritteleekö

a) jono $(1, 1, 1, \ldots)$ avaruuden ℓ^2 duaalin alkion,

b) funktio $f(t) = 1/\sqrt{|t|}$ avaruuden $L^p(-1, 1)$, $1 < p < \infty$, duaalin alkion,

kyseisten avaruuksien tavanomaisen duaaliparin mielessä?

****

In all problems you may assume that the scalar field is the set of real numbers.

1. Is the following bilinear mapping coercive $\ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$:

$$R : (x, y) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_{k+1},$$

where $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$?

2. Give an example of two continuous non-commuting linear operators $S : X \to X$ and $T : X \to X$ in the Banach space X, in other words, operators with $ST \neq TS$. The Banach space must be infinite dimensional, otherwise you can choose the example as you wish.

3. Write a short argument for the fact that the space $C(0, 1)$ endowed with the L^1-norm

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

cannot be complete. (You should use the results presented on the lectures. You can for example use that $\| \cdots \|_1$ and the sup-norm are not equivalent.)

4. Does

a) the sequence $(1, 1, 1, \ldots)$ define an element of the dual of ℓ^2,

b) the function $f(t) = 1/\sqrt{|t|}$ define an element of the dual of $L^p(-1, 1)$, $1 < p < \infty$,

with respect to the usual dual pairings?