FUNCTIONAL ANALYSIS – KURSSIKOE 1/EXAM 1 – 11.3.16 klo/at 12.15-14.45

1. Suppenevatko seuraavat jonot $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ Banach-avaruudessa $C(0,1)$ (yksikkövälin $[0,1]$ jatkuvat funktiot, sup-normi; $t \in [0,1]$ on muuttuja):

$$\text{a)}\ f_n(t) = \frac{1}{t+2+n}\ ,\quad \text{b)}\ f_n(t) = \frac{1}{t+2+\frac{1}{n}}\ ,\quad \text{c)}\ f_n(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{n}}$$

2. Tarkastellaan Hilbert-avaruuden ℓ^2 alkioita

$$\alpha = (1,0,0,0,\ldots)\ ,\quad \beta = (1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\ldots)$$

eli α on jono, jonka ensimmäinen alkio 1 ja muut nollia, sekä β jono, jonka $2n-1$:s ja $2n$:s alkio ovat 2^{-n+1}. a) Mikä on joukon $\{\alpha\}$ ortogonaalinen komplementti? b) Etsi jokin $x \in \ell^2$, $x \neq 0$, jolle pätee $(x|\alpha) = (x|\beta) = 0$.

3. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\cos(2t) + \int_{-1}^{1} \frac{\sin(2s)}{50+t^2} f(s)^2 ds - f(t) = 1\ ,\quad t \in [-1,1],$$

on ratkaisu avaruudessa $C(-1,1)$. Voit pitää tunnettuna, että kaavassa esiintyvä integraalilauseke on t:n jatkuva funktio, kun $f \in C(-1,1)$.

4. Muistutetaan mieleen, että Banach-avaruuden X osajoukko B on kompakti, jos jokaisella joukkoon B sisältyvällä jonolla $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on suppeneva osajono. Valitsemalla sopiva jono osoita, että avaruuden ℓ^2 suljettu yksikköpallo $\overline{B}(0,1) = \{x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1\}$ ei ole kompakti.

****

1. Do the following sequences $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge in the Banach-space $C(0,1)$ (continuous functions on the interval $[0,1]$ with sup-norm; $t \in [0,1]$ is a variable):

$$\text{a)}\ f_n(t) = \frac{1}{t+2+n}\ ,\quad \text{b)}\ f_n(t) = \frac{1}{t+2+\frac{1}{n}}\ ,\quad \text{c)}\ f_n(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{n}}$$

2. In the Hilbert-space ℓ^2, let us consider the elements

$$\alpha = (1,0,0,0,\ldots)\ ,\quad \beta = (1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\ldots)$$

in other words α is a sequence with the first element 1 and others 0, and β is a sequence with $2n-1$:st and $2n$:th elements 2^{-n+1}. a) What is the orthogonal complement of the set $\{\alpha\}$? b)Find some $x \in \ell^2$, $x \neq 0$ such that $(x|\alpha) = (x|\beta) = 0$.

3. Prove that the integral equation

$$\cos(2t) + \int_{-1}^{1} \frac{\sin(2s)}{50+t^2} f(s)^2 ds - f(t) = 1\ ,\quad t \in [-1,1],$$

has a solution in $C(0,1)$. You do not need to prove that the integral expression in the equation is a continuous function of t, when $f \in C(-1,1)$.

4. Let us recall that a subset B of a Banach space X is compact, if every sequence $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ contained in B has a convergent subsequence. By choosing a suitable sequence, show that the closed unit ball $\overline{B}(0,1) = \{x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1\}$ of ℓ^2 is not compact.