FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
2. KURSSIKOE
5.5.2011

Kaikissa tehtävissä voit olettaa, että kerroinkunta on reaalilukujen joukko.

1. Ortonormita funtioiden $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ ja $f_3(t) = \sin t$ muodostama jono Hilbert avaruudessa $L^2(0,1)$, eli muodosta ortonormaali jono, joka virittää saman aliavaruuden kuin funktiot f_j.

2. Esitä jokin esimerkki kahdesta jatkuvasta lineaarisesta operaattorista $S : X \to X$ ja $T : X \to X$ Banach-avaruudessa X, jotka eivät kommutoi, toisin sanoen $ST \neq TS$. Banach-avaruuden on oltava äärettömänulotteinen, mutta muuten voit valita esimerkin vapaasti.

3. Esitä jokin isomorfismi (lineaarinen bijektio, joka on jatkuva, samoin sen käänteiskuvaus) Banach-avaruuksien $L^p(0,1)$ sekä $L^p(-10,10)$ välillä, kun $1 \leq p < \infty$.

4. Määritteleekö

a) jono $(1,1,1,\ldots)$ avaruuden ℓ^2 duaalin alkion,

b) funktio $f(t) = 1/\sqrt{|t|}$ avaruuden $L^p(-1,1)$, $1 < p < \infty$, duaalin alkion,

kyseisten avaruuksien tavanomaisen duaaliparin mielessä? (Duaalilla tarkoitetaan tässä topologista duaalia, kuten tavallista.)

****

In all problems you may assume that the scalar field is the set of real numbers.

1. Convert the sequence $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ ja $f_3(t) = \sin t$ into an orthonormal sequence in the Hilbert space $L^2(0,1)$, such that the linear span of the new sequence is the same as that of the functions f_j.

2. Give an example of two continuous non-commuting linear operators $S : X \to X$ and $T : X \to X$ in the Banach space X, in other words, $ST \neq TS$. The Banach space must be infinite dimensional, otherwise you can choose the example as you wish.

3. Construct an isomorphism (that is, a linear bijection, which is continuous as well as its inverse) between the Banach spaces $L^p(0,1)$ and $L^p(-10,10)$, for $1 \leq p < \infty$.

4. Does

a) the sequence $(1,1,1,\ldots)$ define an element of the dual of ℓ^2,

b) the function $f(t) = 1/\sqrt{|t|}$ define an element of the dual of $L^p(-1,1)$, $1 < p < \infty$,

with respect to the usual dual pairings? ("Dual" means here the topological dual, as usual.)

$v \times B = \frac{E}{a} + vn$

$eE + e\,v \times b - vmv = 0$

$J = \sigma E$

$nve = \sigma E$