

Matematiikan ja tilastotieteen osasto  
Geometria I  
Loppukoe, 11.3.2021

Ratkaisut palautettava Moodleen klo 15:00 mennessä.

Kaikki tehtävät koskevat tavallista Eukliidista (koordinaatti)geometriaa.

1. Pisteet  $P$  ja  $Q$  ovat  $O$ -keskisen ympyrän kehällä. Pisteeseen  $Q$  piirretty ympyrän tangentti leikkaa puolisuoran  $\overrightarrow{OP}$  pisteessä  $R$ . Määritä kulma  $\angle PRQ$ , kun kulma  $\angle PQR = \alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi/4$ .
2. Kolmiossa  $\triangle OAB$  on
$$\vec{OA} = t\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{ja} \quad \vec{OB} = -2\vec{i} + (t-2)\vec{j},$$
missä  $t \in \mathbb{R}$ . Osoita, että  $AB$  on kolmion pisin sivu kaikilla  $t \in \mathbb{R}$ .
3. Suoran ympyräkartion, jonka korkeus on  $\frac{5}{4}R$ , huippu ja pohjaympyrä ovat  $R$ -säteisen pallon pinnalla. Kuinka monta prosenttia kartion tilavuus on pallon tilavuudesta?
4. Tasasivuisen kolmion, jonka sivujen pituudet ovat  $= s$ , sisällä on kolme  $r$ -säteistä ympyrää, jotka sivuavat toisiaan pareittain. Lisäksi kukin ympyrä sivuaa kahta kolmion sivua. Määritä suhde  $r : s$ .
5. Olkoon  $AB$  ympyrän  $Y_1$  jänne ja  $P$  janan  $AB$  keskipiste. Olkoon lisäksi  $CD$  toinen ympyrän  $Y_1$  jänne, joka leikkaa  $AB$ :n pisteessä  $P$ . Oletetaan lisäksi, että  $CD$  on ympyrän  $Y_2$  halkaisija. Pisteeseen  $P$  piirretty  $\overleftrightarrow{CD}$ :n normaali leikkaa  $Y_2$ :n pisteessä  $E$ . Osoita, että  $|PE| = |AP|$ .