HY / Matematiikan ja tilastotieteen osasto
MAT11005/AYMAT11005: Integraalilaskenta
Kurssikoe 2.3.2020
Sallitut apuvälineet: Ei apuvälineitä.

t1. (6p.) Laske

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Perustele vastauksesi.

Ratkaisu: Olkoot $f\colon [0,\pi]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x$, ja $g\colon[0,\pi]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto -\cos(x)$. Tällöin $f'(x)=1$ ja $g'(x)=\sin(x)$ kaikilla $x\in[0,\pi]$. Näin ollen osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x &= \Big/_0^\pi f(x)g(x) - \int_0^\pi f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x &(1)\\ &= \Big/_0^\pi -x\cos(x) - \int_0^\pi -\cos(x)\,\mathrm{d}x &(2)\\ &= -\left(\pi\cos(\pi)-0\cos(0)\right)+\int_0^\pi \cos(x)\,\mathrm{d}x &(3)\\ &= \pi + \Big/_0^\pi \sin(x) = \pi &(4)\end{aligned}$$

[**Arviointi:**] Piste osittaisintegroinnin yrittämisestä. Piste oikeasta osittaisintegrointi kaavasta. Piste oikeista funktioista f ja g osittaisintegroinnissa. Yhteensä kolme pistettä oikeasta laskusta, eli piste per rivi jokaisesta rivistä (2),(3),(4).

t2. (6p.) Suppeneeko epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x?$$

Perustele vastauksesi.

Ratkaisu: ***Tapa I:*** Funktio $f\colon [1,\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{x^2+x}$, on ei-negativiinen, joten voidaan käyttää vertailuperiaatetta. Olkoon $g\colon[1,\infty[\to\mathbb{R}$ ei-negatiivinen funktio $x\mapsto\frac{1}{x^2}$. Koska

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2+x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x} = 1, \tag{5}$$

niin integraali

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

suppenee, jos ja vain jos integraali

$$\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

suppenee. Koska

$$\begin{aligned}\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to\infty}\Big/_1^c (-1)x^{-1} &(6)\\ &= \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{c}-(-1)\right) = \lim_{c\to\infty}\left(1--\frac{1}{c}\right) = 1, &(7)\end{aligned}$$

niin integraali

$$\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

suppenee.

[**Arviointi:**] Yksi piste vertailuperiaatteen ideasta. Yksi piste sopivan funktion g valitsemisesta. Kaksi pistettä vertailuperiaatteen pätevyyden perustelusta (eli funktioiden positiivisuuden toteamisesta ja raja-arvon (5) tai raja-arvon $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)$ laskemisesta). Yhteensä kaksi pistettä funktion g epäoleellisen integraalin suppenemisen osoittamisesta: piste per rivi joikaisesta rivistä (6) ja (7). Yksi piste, jos funktion g epäoleellisen integroitumista on pidetty tunnettuna, mutta ei ole perusteltu.

Tapa II: Funktio $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$, $x\mapsto \frac{1}{x^2+x}$, on ei-negativiinen, joten voidaan käyttää majoranttiperiaatetta. Olkoon $g\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$ ei-negatiivinen funktio $x\mapsto \frac{1}{x^2}$. Koska

$$x^2+x\geq x^2$$

jokaisella $x\geq 1$, niin $f(x)\leq g(x)$ jokaisella $x\in[1,\infty[$. Näin ollen epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$$

suppenee, jos epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

suppenee.

Koska

$$\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty}\int_1^c x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \Big/_1^c (-1)x^{-1} \tag{8}$$

$$= \lim_{c\to\infty}\left(-\frac{1}{c}-(-1)\right) = \lim_{c\to\infty}\left(1-\frac{1}{c}\right) = 1, \tag{9}$$

niin integraali

$$\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$$

suppenee.

[**Arviointi:**] Yksi piste majoranttiperiaatteen ideasta. Yksi piste sopivan funktion g valitsemisesta. Kaksi pistettä majoranttiperiaatteen pätevyyden perustelusta (eli funktioiden positiivisuudesta epäyhtälöstä $f(x)\leq g(x)$ kaikilla $x\in[1,\infty[$). Kaksi pistettä funktion g epäoleellisen integraalin suppenemisen osoittamisesta: piste per rivi joikaisesta rivistä (9) ja (10). Yksi piste, jos funktion g epäoleellista integroitumista on pidetty tunnettuna, mutta ei ole perusteltu.

t3. (6p.) Laske

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^2 \left(\frac{x}{2+x^2}+\frac{1}{n}\sin(x^2)\right)\,\mathrm{d}x.$$

Perustele vastauksesi.

Ratkaisu: **Tapa I:** Olkoon $f_n\colon [0,2]\to\mathbb{R}$ funktio $x\mapsto \frac{x}{2+x^2}+\frac{1}{n}\sin(x^2)$ jokaisella $n\in\mathbb{N}_1$. Osoitetaan ensin, että jono (f_n) suppenee tasaisesti funktioon $f\colon [0,2]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \frac{x}{2+x^2}$.

Koska $-1 \leq \sin(x^2) \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin

$$0 \leq \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2]} \left| \frac{x}{2+x^2} - \left(\frac{x}{2+x^2} + \frac{1}{n}\sin(x^2) \right) \right| \tag{10}$$

$$= \sup_{x\in[0,2]} \left| \frac{1}{n}\sin(x^2) \right| = \frac{1}{n} \sup_{x\in[0,2]} |\sin(x^2)| \leq \frac{1}{n} \to 0, \tag{11}$$

kun $n \to \infty$. Jono (f_n) suppenee siis tasaisesti funktioon f. Näin ollen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \left(\frac{x}{2+x^2} + \frac{1}{n}\sin(x^2) \right) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{2+x^2} \,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

Koska

$$\int_0^2 \frac{x}{2+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2x}{2+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \Big/_0^2 \ln|2+x^2|$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 6 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{6}{2} = \frac{1}{2}\ln 3,$$

niin

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \left(\frac{x}{2+x^2} + \frac{1}{n}\sin(x^2) \right) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3.$$

[**Arviointi:**] Piste tasaisen suppenemisen määritelmästä. Piste oikeasta rajafunktiosta f. Yhteensä kaksi pistettä tasaisen suppenemisen tarkastamisesta, eli piste per rivi riveistä (10) ja (11). Piste tasaisen suppenemisen hyödyntämisestä, eli rivistä (12). Piste funktion f integraalin laskemisesta.

Tapa II: Olkoot $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x/(x^2+2)$, ja $h\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x^2)$. Olkoon myös $h_n\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1/n)g(x)$, jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$. Selvästi funktiot g, h ja h_n ovat jatkuvia jokaiseilla $n \in \mathbb{N}_1$ ja siten ne ovat myös integroituvia.

Koska funktiot g ja h_n ovat integroituvia, niin myös $g + h_n$ on integroituva ja pätee

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{n}\sin(x^2) \,\mathrm{d}x = \int_0^2 g(x) + h_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^2 g(x) \,\mathrm{d}x + \int_0^2 h_n(x) \,\mathrm{d}x$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$. Lisäksi

$$\int_0^2 h_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{n}h(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^2 h(x) \,\mathrm{d}x$$

jokaisella $n \in \mathbb{N}_1$.

Koska

$$\int_0^2 g(x) \,\mathrm{d}x$$

ja

$$\int_0^2 h(x) \,\mathrm{d}x$$

ovat parametrista $n \in \mathbb{N}_1$ riippumattomia reaalilukuja, niin

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \left(\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{n}\sin(x^2) \right) \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^2 g(x) \,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_0^2 h(x) \,\mathrm{d}x \right)$$
$$= \int_0^2 g(x) \,\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_0^2 h(x) \,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^2 g(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x}{x^2+2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3,$$

missä viimeinen integraali on laskettu kuten tavan I tapauksessa.

[**Arviointi:**] Kaksi pistettä funktioiden g, h ja h_n muodostamisesta ja toteamisesta integroituviksi. Kaksi pistettä alkuperäisen integraalin sieventämisestä funktion g integraaliksi. Kaksi pistettä funktion g integraalin laskemisesta.

t4. (6p) Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ integroituva funktio ja olkoon $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ sellainen funktio, että $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \in]0,1]$. Osoita, että g on integroituva.

Ratkaisu:

Tapa I: Olkoon $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ funktio $x \mapsto g(x) - f(x)$. Tällöin $h(x) = 0$ kaikilla $x \in]0,1]$. Näin ollen $|h(x)| \leq |h(0)|$ kaikilla $x \in [0,1]$. Funktio h on siis rajoitettu funktio.

Osoitetaan, että h on integroituva. Jos $h(0) = 0$, niin h on nollafunktio ja siten integroituva. Oletetaan nyt, että $h(0) \neq 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $x_1 = \min\{\varepsilon/(3|h(0)|), 1/2\}$. Tällöin jaolle $J\colon x_0, x_1, x_2$ pätee

$$\overline{S}_J(h) = \left(\sup_{x\in[x_0,x_1]} h(x)\right)(x_1 - x_0) + \left(\sup_{x\in[x_1,x_2]} h(x)\right)(x_2 - x_1) \leq |h(0)|\frac{\varepsilon}{3|h(0)|} + 0 = \frac{\varepsilon}{3}.$$

ja

$$\underline{S}_J(h) = \left(\inf_{x\in[x_0,x_1]} h(x)\right)(x_1 - x_0) + \left(\inf_{x\in[x_1,x_2]} h(x)\right)(x_2 - x_1) \geq (-|h(0)|)\frac{\varepsilon}{3|h(0)|} + 0 = -\frac{\varepsilon}{3}.$$

Näin ollen

$$\overline{S}_J(h) - \underline{S}_J(h) \leq 2\frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Funktio h on näin ollen integroituva Riemannin integroitumisehdon perusteella.

Koska f ja h ovat integroituvia, niin myös $g = f + h$ on integroituva.

[**Arviointi:**]

- Piste funktion h osoittamisesta rajoitetuksi.
- Yhteensä 4 pistettä funktion h osoittamisesta integroituvaksi: Piste Riemannin integrointiehdon käyttämisestä ja nollafunktion erikoistapauksen käsittelystä. Piste jaon J valinnasta. Piste ylläsumman arvioista ja piste alasumman arvioista.
- Piste huomiosta, että $g = f + h$ on integroituva.

Tapa II: Osoitetaan ensin, että g on rajoitettu. Koska f on rajoitettu, niin on olemassa sellainen $M' > 0$, että $|f(x)| \leq M'$ kaikilla $x \in [0,1]$. Olkoon nyt $M = \max\{M', |g(0)|\} + 1$. Tällöin selvästi $|g(0)| \leq M$. Toisaalta jokaisella $x \in]0,1]$ pätee $|g(x)| = |f(x)| \leq M' \leq M$. Näin ollen $|g(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [0,1]$ ja g on rajoitettu.

Osoitetaan, että g integroituva Riemannin integroituvuusehdon avulla. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on integroituva, niin on olemassa sellainen välin $[0,1]$ jako $J\colon x_0, \ldots, x_k$, jolle pätee $\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f) < \varepsilon/2$.

Olkoon nyt $c = \min\{x_1/2, x_0 + \varepsilon/(4M)\}$ ja olkoon $A\colon x_0, c, x_1, \ldots, x_k$ jaon J tihennys. Huomaa, että luvun c valinnan perusteella pätee $x_0 < c < x_1$.

Koska A tihentää jakoa J, niin

$$\overline{S}_A(f) \leq \overline{S}_J(f)$$

ja

$$\underline{S}_A(f) \geq \underline{S}_J(f).$$

Koska $c \leq x_0 + \varepsilon/(4M)$, niin

$$\begin{aligned}
\overline{S}_A(g) &= \left(\sup_{x\in[x_0,c]} g(x)\right)(c-x_0) + \left(\sup_{x\in[c,x_1]} g(x)\right)(c-x_0) + \sum_{j=2}^{k}\left(\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} g(x)\right)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq M(c-x_0) + \left(\sup_{x\in[x_0,x_1]} g(x)\right)(x_1-x_0) + \sum_{j=2}^{k}\left(\sup_{x\in[x_{j-1},x_j]} g(x)\right)(x_j - x_{j-1}) \\
&\leq M\frac{\varepsilon}{4M} + \overline{S}_J(f) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \overline{S}_J(f).
\end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned}
S_A(g) &= \left(\inf_{x\in[x_0,c]} g(x)\right)(c-x_0) + \left(\inf_{x\in[c,x_1]} g(x)\right)(c-x_0) + \sum_{j=2}^{k}\left(\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} g(x)\right)(x_j - x_{j-1}) \\
&\geq (-M)(c-x_0) + \left(\inf_{x\in[x_0,x_1]} g(x)\right)(x_1-x_0) + \sum_{j=2}^{k}\left(\inf_{x\in[x_{j-1},x_j]} g(x)\right)(x_j - x_{j-1}) \\
&\geq -\frac{\varepsilon}{4} + \underline{S}_J(f).
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\overline{S}_A(g) - \underline{S}_A(g) \leq \overline{S}_J(f) + \frac{\varepsilon}{4} - \left(\underline{S}_J(f) - \frac{\varepsilon}{4}\right) = \overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Funktio g on siis integroituva.

[**Arviointi:**] Piste funktion g osoittamisesta rajoitetuksi. Piste Riemannin integrointiehdon käyttämisestä ja jaon J valinnasta. Piste jaon A valinnasta. Piste tiedosta, että $\overline{S}_A(f) \leq \overline{S}_J(f)$ ja $\underline{S}_A(f) \geq \underline{S}_J(f)$. Piste arviosta $\overline{S}_A(g) \leq \overline{S}_J(f)$ ja piste arviosta $\underline{S}_A(g) \geq \underline{S}_J(f)$.