HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Integraalilaskenta
Kurssikoe 2 h 30 min
9.3.2017

1. (a) Määritä vakiot A ja B siten, että $\dfrac{1}{x^2+2x-3} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-1}$.
   (b) Laske integraali $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2+2x-3}$.

2. Tutki, suppeneeko epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_{8}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x}}\,dx$.

3. Olkoon $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1, \\ x, & 1 \leqslant x < 3, \\ 4, & x = 3, \\ 5, & 3 < x \leqslant 4, \end{cases}$$
ja olkoon $0, 1, 3, 4$ välin $[0,4]$ jako J.
   (a) Laske funktion f jakoon J liittyvän ylä- ja alasumman erotus $\overline{S}_J(f) - \underline{S}_J(f)$.
   (b) Määritä jotkin sellaiset pisteet z ja w, että jakoon J liittyville Riemannin summille $S_J(f,1,2,z)$ ja $S_J(f,0,w,3)$ pätee
$$S_J(f,1,2,z) = S_J(f,0,w,3) = \int_0^4 f(x)\,dx.$$
Integraalin $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$ arvon voit laskea geometrian tietojesi avulla (piirrä kuva).

4. Olkoot $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$, $n \in \mathbb{N}_1$.
   (a) Laske integraali $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$, missä $n \in \mathbb{N}_1$. Huom! Integraalin arvo riippuu luvusta n.
   (b) Määritä rajafunktio $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.
   Tutki, onko yhtälö
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$
   voimassa.

Huom! Laskimella saatu vastaus ei missään tehtävässä riitä perusteluksi.