HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Integraalilaskenta
Erilliskoe 15.6.2016

1. Laske integraalit (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, e^{\cos x}\, dx$ ja (b) $\int \frac{x-2}{x^2+x}\, dx$.

2. Olkoon $f, g\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ ja $g(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$. Olkoon $-\pi, 0, \frac{\pi}{3}, \pi$ välin $[-\pi, \pi]$ jako J.
   (a) Laske funktion g jakoon J liittyvät alasumma $\underline{S}_J(f)$ ja yläsumma $\overline{S}_J(f)$.
   (b) Määritä kohdan (a) tuloksen perusteella sellaiset sellaiset luvut a ja b, että $b > a > 2\pi$ ja funktion f kuvaajan pituudelle $\ell(f)$ on voimassa $a \leqslant \ell(f) \leqslant b$.

3. Tutki, millä s:n arvoilla epäoleellinen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s e^x}{e^x + 1}\, dx$ suppenee.

4. Merkitään $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geqslant 0\}$ ja tutkitaan funktiojonoa $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,
$$f_n(x) = nx \int_n^{nx+1} y^{-2} e^{n/y}\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}_1.$$
   Osoita, että jono (f_n) suppenee pisteittäin joukossa $\mathbb{R}_+$. Onko suppeneminen tasaista?

5. Todista, että
$$\int_0^1 x^n (1-x)^m\, dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx, \qquad n, m \in \mathbb{N}_1.$$

Huom! Laskimella saatu vastaus ei missään tehtävässä riitä perusteluksi.