Helsingin yliopisto
Matemaattisten tieteiden kandiohjelma
MAT21014 Johdatus logiikkaan 2
Loppukoe
22.12.2022

Kokeessa ei saa käyttää laskimia, taulukkokirjoja, eikä muitakaan lisämateriaaleja.

1. Anna

   (a) malli ja tulkintafunktio, jotka toteuttavat kaavan

   $$\forall x_0 (R(x_0, x_1) \land \exists x_1 \neg R(x_0, x_1)),$$

   (b) verkkojen aakkoston lause, joka ilmaisee, että verkossa on ainakin yksi piste, jolla ei ole naapureita.

   Tehtävissä (a) ja (b) riittää pelkkä vastaus ilman tarkempia perusteluja.

2. Anna luonnollinen päättely lauseelle

   $$\exists x\, P(x) \to \neg \forall x \neg P(x).$$

3. Osoita, että kaavasta

   $$\exists x R(x, y) \land \exists x R(x, z)$$

   ei voi päätellä kaavaa $\exists x (R(x, y) \land R(x, z))$.

4. Olkoon $L = \{P, R\}$ ja olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ kaksi L-mallia, joilla

   $$\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

   sekä

   $$P^{\mathcal{M}} = \{2, 5\}, \quad R^{\mathcal{M}} = \{(3, 1), (3, 5), (5, 2)\}$$

   ja

   $$P^{\mathcal{M}'} = \{4, 5\}, \quad R^{\mathcal{M}'} = \{(3, 2), (4, 3), (4, 5)\}.$$

   Ovatko $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ isomorfiset? Perustele.