

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus logiikkaan 2
Kurssikoe
13.5.2016

Kokeessa ei saa käyttää laskimia eikä taulukkokirjoja.

1. Anna

(a) verkkojen aakkoston lause, joka ilmaisee, että verkossa on tasan yksi piste, jolla ei ole naapureita.

(b) malli \mathcal{M} , jolla $\mathcal{M} \models A(c/x)$, kun

A on kaava $\exists y(P(x) \rightarrow \forall xR(x, y))$.

Tehtävissä (a) ja (b) pelkkä vastaus riittää, eikä tarkempia perusteluja tarvita.

2. Osoita, että kaava

$$\forall x(R(x, y) \vee P(x)) \rightarrow (\forall xR(x, y) \vee \forall yP(y))$$

ei ole validi.

3. Olkoon $L = \{R\}$ ja olkoon \mathcal{M} L -malli, jossa $\text{dom}(\mathcal{M}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $R^{\mathcal{M}} = \{(1, 2), (4, 2), (5, 4)\}$. Anna L -kaava, joka määrittelee joukon $\{1, 5\}$ mallissa \mathcal{M} .

4. Anna luonnollinen päättely lauseelle $\exists yR(y, F(y))$ oletuksista $\forall xP(F(x))$ ja $\exists y\forall x(P(x) \rightarrow R(y, x))$.

5. Olkoon $L = \{P, R, c\}$ ja olkoot \mathcal{M} ja \mathcal{M}' kaksi L -mallia, joilla

$$\text{dom}(\mathcal{M}) = \text{dom}(\mathcal{M}') = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

sekä

$$P^{\mathcal{M}} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad R^{\mathcal{M}} = \{(0, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 0)\} \text{ ja } c^{\mathcal{M}} = 0$$

ja

$$P^{\mathcal{M}'} = \{2, 4, 6, \overset{1}{\mathbb{N}}\}, \quad R^{\mathcal{M}'} = \{(0, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 0)\} \text{ ja } c^{\mathcal{M}'} = 5.$$

Ovatko \mathcal{M} ja \mathcal{M}' isomorfiset? Perustele.