

JOHDATUS LUKUTEORIAAN II

Loppukoe (Ma 2.3.2026) klo 15-18

HUOM. vastaa **vain neljään** kysymyksistä 1-6.
Apuvälineiden käyttö ei ole sallittua.

1. Laske Legendren symbolit $\left(\frac{65}{97}\right)$ ja $\left(\frac{56}{79}\right)$
2. (i) Mikä on Eulerin kriteeri Legendren symbolin laskemiseksi?
(ii) Osoita, että Legendren symboli on täysin multiplikatiivinen, eli

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$$

kaikilla alkuluvuilla $p \geq 3$ ja kaikilla $a, b \in \mathbf{Z}$.

3. Määrittele lukuteoreettisten funktioiden Dirichlet-konvoluutio. Osoita, että kahden multiplikatiivisen lukuteoreettisen funktion Dirichlet-konvoluutio on myös multiplikatiivinen.
4. (i) Konstruoi Fareyn jonot F_7 ja F_8 .
(ii) Osoita että jos $x \in (0, 1)$ on reaaliluku ja $\varepsilon > 0$ on annettu, niin on olemassa rationaaliluku p/q jolle pätee $|x - p/q| \leq \varepsilon$ ja

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

[Voit käyttää luennoilla todistettua tietoa: kahdelle perättäiselle Fareyn jonon jäsenelle a/b ja c/d pätee $cb - ad = 1$.]

5. (i) Etsi Pellin yhtälöllä $x^2 - 3y^2 = 1$ kolme eri positiivista ratkaisuparia.
(ii) Osoita, että (i)-kohdan yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisuparia.
6. (i) Määrittele mikä on $\mathbf{Z}_n^*$:n karakteri. Osoita, että karakterin arvo on aina yksikköjuuri.
(ii) Montako eri karakteria on ryhmällä $\mathbf{Z}_{p^\alpha}$, missä $p \geq 3$ on alkuluku? Perustele väitteesi.