HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Johdatus yliopistomatematiikkaan
Korvaava lopputentti 2 h 30 min
31.10.2024

Tentissä ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa (eikä muitakaan apuvälineitä).

1. Ovatko seuraavat väitteet totta? Vastaa K (= kyllä) tai E (= ei). Perusteluja ei tarvita.
   (a) Jos A ja B ovat äärellisiä joukkoja, niin $|A \cup B| \leqslant |A| + |B|$.
   (b) Kuvaus $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -2x$, ei ole injektio.
   (c) Jos x ja y ovat irrationaalilukuja, niin niiden tulo xy on aina rationaaliluku.
   (d) Kompleksiluvun $-i$ eksponenttiesitys on $e^{i3\pi/2}$.
   (e) Kuvaukselle $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, yhdistetty kuvaus $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on $(f \circ f)(x) = 4x^2$.
   (f) Kompleksiluvun vastaluvun liittoluku on liittoluvun vastaluku eli $\overline{-z} = -\bar{z}$.

2. Olkoot A, B, C ja D perusjoukon X osajoukkoja.
   (a) Osoita, että jos $A \subset C$ ja $B \subset D$, niin $A \cap B \subset C \cap D$.
   (b) Perustele kohdan (a) tulos Vennin kaavioiden avulla.
   (c) Osoita keksimällä sopivat joukot A, B, C ja D, että jos $A \subset C$ ja $B \subset D$, niin $A \cup B \subset C \cap D$ ei välttämättä päde.

3. Olkoon $A = \{-1, 0, 1, 2\}$. Muodosta luettelemalla alkiot joukon A relaatio

$$xRy \iff x = -y + 1.$$

   Piirrä relaatiosta nuolikaavio. Onko relaatio R ekvivalenssirelaatio? Perustele vastauksesi.

4. Osoita, että

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1.$$

Scanned with CamScanner Scanné avec CamScanner