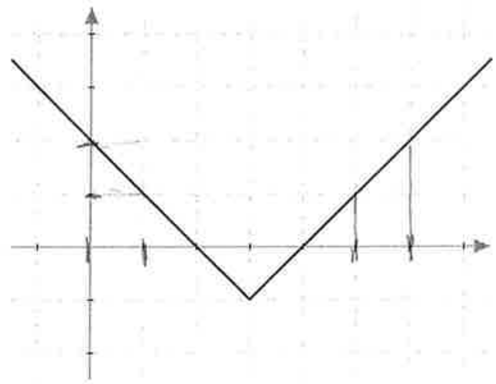
HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan
2. kurssikoe 9.5.2016

- ⋆ Koeaika on 2 h 30 min.
- ⋆ Vastaa neljään tehtävään: tehtäviin 1–3 ja lisäksi joko tehtävään 4 tai tehtävään 5.
- ⋆ Kaikki ratkaisut voi kirjoittaa samalle konseptiarkille, jos tila riittää.
- ⋆ Laskimen käyttö on sallittu. Taulukkokirjan käyttö on kielletty.

1. (a) Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = |x-3|-1$. Merkitään $A = [5,6]$.
   i. Päättele alla olevan kuvaajan avulla kuva fA ja alkukuva $f^{\leftarrow}[fA]$.
   ii. Päättele alla olevan kuvaajan avulla, onko f injektio tai surjektio.

   Koordinaatiston ruutujen sivun pituus on 1.



(b) Määritellään $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ja $g\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ asettamalla

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = 2m - n \quad \text{ja} \quad g(m,n) = 2m - n$$

kaikilla m, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Onko f kuvaus? Onko g kuvaus? Pitääkö paikkansa, että $f = g$?

2. (a) Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jolla

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Onko f injektio? Entä surjektio? Perustele vastauksesi todistuksilla, jotka nojautuvat näiden käsitteiden määritelmiin.

(b) Tarkastellaan kuvausta $f\colon \mathbb{R} \to [3,\infty[$, jolla $f(x) = x^2 + 3$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kurssikaverisi piti määrittää tämän kuvauksen käänteiskuvaus tai perustella, että sitä ei ole olemassa. Hän määritteli kuvauksen $g\colon [3,\infty[\to \mathbb{R}$ asettamalla $g(x) = \sqrt{x-3}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja tutki yhdistettyä funktiota $f \circ g$:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-3}\right) = \left(\sqrt{x-3}\right)^2 + 3 = x - 3 + 3 = x.$$

Tästä hän päätteli, että g on funktion f käänteisfunktio.

Onko johtopäätös oikea? Miten neuvoisit kurssikaveriasi tässä tehtävässä?

Käännä!

3. Määritellään joukon $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ relaatio $\sim$ seuraavasti: $a \sim b$, jos ja vain jos $ab > 0$.

(a) Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

(b) Kirjoita näkyviin ekvivalenssiluokan määritelmä. Mitkä ovat relaation $\sim$ ekvivalenssiluokat? Luettele kaksi alkiota jokaisesta ekvivalenssiluokasta. Kuinka monta eri ekvivalenssiluokkaa relaatiolla $\sim$ on?

Valitse toinen seuraavista tehtävistä! Tehtävä 4 liittyy kompleksilukuihin ja tehtävä 5 liittyy tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaan.

4. (a) Muodosta luvun $-2-2i$ napaesitys tai eksponenttiesitys.

(b) Laske Moivren kaavan avulla $(-2-2i)^{10}$. Kirjoita tulos muodossa $a+bi$, missä $a,\ b \in \mathbb{R}$.

(c) Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $(2x^2+3x-5)(x^3+8i) = 0$ ja merkitse löytämäsi ratkaisut kompleksitasoon.

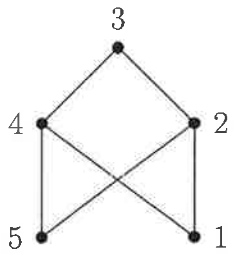
5. (a) Kerhoon kuuluu kahdeksan naista ja seitsemän miestä. Heistä muodostetaan joukkue, johon valitaan kolme naista ja neljä miestä. Kuinka monta erilaista joukkuetta on mahdollista muodostaa? Entä jos riidan vuoksi nainen A ei suostu olemaan samassa joukkueessa miehen B kanssa?

(b) Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$ ja $a > 1$. Mitä voit päätellä luvun a 2-kantaisen logaritmin muutoksesta, jos luku a itse

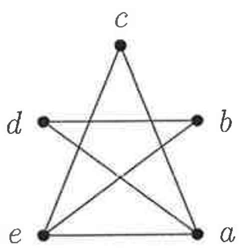
i. kasvaa kahdeksankertaiseksi? ii. korotetaan potenssiin 8?

Toisin sanottuna, mitä voit päätellä logaritmeista $\log_2(8a)$ ja $\log_2(a^8)$ verrattuna logaritmiin $\log_2(a)$?

(c) Onko alla oleva verkko G kaksijakoinen? Ovatko verkot G ja H isomorfiset? Muista perustella.



G



H