HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan
Erilliskoe 15.6.2016

- ⋆ Koeaika on 3 h 30 min.
- ⋆ Vastaa viiteen tehtävään: tehtäviin 1–4 ja lisäksi joko tehtävään 5 tai tehtävään 6.
- ⋆ Kaikki ratkaisut voi kirjoittaa samalle konseptiarkille, jos tila riittää.
- ⋆ Laskimen käyttö on sallittu. Taulukkokirjan käyttö on kielletty.

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia kaikilla joukoilla A, B ja C?

   (a) Jos $A \cup C = B \cup C$, niin $A \cap C = B \cap C$.

   (b) Jos $A \cap B \subset C$, niin $A \cap (B \setminus C) = \emptyset$.

2. Määritellään jono kokonaislukuja $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ rekursiivisesti asettamalla $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ ja $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 2$.

   (a) Laske summa $a_0 + a_2 + a_4 + a_6$ ja vertaa sitä lukuun $a_7 - 1$.

   (b) Osoita induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $\sum_{i=0}^{n} a_{2i} = a_{2n+1} - 1$.

3. (a) Tarkastellaan kuvausta $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolla $f(x) = 2 + 3x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Määritä kuvauksen f käänteiskuvaus tai perustele, että sitä ei ole olemassa.

   (b) Tarkastellaan kuvausta $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, jolla $g(z) = 3 + 2z$ kaikilla $z \in \mathbb{Z}$. Onko kuvaus g injektio? Entä surjektio? Nojaudu perusteluissa näiden käsitteiden määritelmiin.

4. Merkitään parittomien kokonaislukujen joukkoa kirjaimella X; toisin sanottuna merkitään $X = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Määritellään joukon X relaatio $\sim$ seuraavasti: $a \sim b$, jos ja vain jos $a - b = 4m$ jollakin $m \in \mathbb{Z}$.

   (a) Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.

   (b) Kirjoita määritelmä ekvivalenssiluokalle $[1]_\sim$ ja luettele kolme eri alkiota tästä ekvivalenssiluokasta. Anna lisäksi esimerkki jostain ekvivalenssiluokasta $[c]_\sim$, jolla pätee $[c]_\sim \neq [1]_\sim$. Kuinka monta eri ekvivalenssiluokkaa relaatiolla $\sim$ on?

Valitse toinen seuraavista tehtävistä! Tehtävä 5 liittyy kompleksilukuihin ja tehtävä 6 liittyy tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaan.

5. (a) Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $3z + i = (1 - i)(z - 2)$. Anna ratkaisu tai ratkaisut muodossa $z = a + bi$, missä a, $b \in \mathbb{R}$.

   (b) Muodosta luvun $2i - 2$ napaesitys tai eksponenttiesitys ja määritä kaikki sellaiset kokonaisluvut n, joilla $(2i - 2)^n \in \mathbb{R}$.

   (c) Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $(x^2 + 6x + 13)(x^4 + 81) = 0$ ja merkitse löytämäsi ratkaisut kompleksitasoon.

$x(x^5 + x^4 + x + 1)$

$x((\cancel{x} + x^5)(x + 1))$

$2 \cdot 2 \quad 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$2^6 = 64$

$2^5 = 32$

$2^2 = 4$

$2^1 = 2$

Käännä!

6. (a) Muodosta seuraavien kokonaislukuja koskevien väitteiden negaatiot ja kirjoita ne logiikan symbolien avulla käyttämättä symbolia $\neg$. Kumpi on tosi, väite vai sen negaatio? Perustele.

i. $\forall x(x + 1 > x \wedge 2x > x)$ ii. $\exists x(x < 0 \rightarrow x^2 < 0)$

(b) Tarkastellaan 12 bitin jonoja kuten esimerkiksi 0011 0101 1001. Kuinka monessa tällaisessa jonossa on

i. tasan viisi nollaa?

ii. tasan kuusi ykköstä, joista yksi jonon kummassakin päässä?

(c) Yhdysvaltojen posti (United States Postal Service eli USPS) yksilöi myymänsä maksumääräykset 11-merkkisellä koodilla $d_1 d_2 \ldots d_{11}$. Kymmenen ensimmäistä merkkiä identifioivat maksumääräyksen ja viimeinen merkki d_{11} on tarkistusmerkki, joka määräytyy yhtälöstä

$$d_{11} = \sum_{k=1}^{10} d_k \bmod 9.$$

i. Onko numerosarja 85079 10385 8 virheetön USPS-maksumääräyskoodi?

ii. USPS-maksumääräyskoodin 66687■0320 1 yksi merkki on tuhraantunut lukukelvottomaksi. Selvitä, mikä puuttuva merkki on.

$x^6 + x^5 + x^2 + x - 4$

$= (x-1)(x^6 + x^5 + x^2 + x - 4)$

$+ x^7 - x^6 - x^3 - x^2 + 4x$