

Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan
Kurssikoe 25.10.2022
Petteri Harjulehto

Tässä kokeessa ei saa käyttää laskinta, taulukkokirjaa tai materiaalia.

Muista perustella kaikki vastauksesi.

Tehtävä 1. • Olkoon $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Todista, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Merkitse paikka, jossa käytit oletusta $x > -1$.

- Låt $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Bevisa för alla $n \in \mathbb{N}$ att

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Peka ut platsen där du använder det antagandet $x > -1$.

- Let $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Show for all $n \in \mathbb{N}$ that

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Point out the place where you use the assumption $x > -1$.

Pisteytys 1.

- Oikea rakenne, 1p.
- alkuarvolla testaus oikein, 1p.
- induktiooletus oikein, 1p.
- tapauksen $n + 1$ käsittely, 3p.

Tehtävän ratkaisun voi tarkistaa 2. harjoituksen malliratkaisuista.

Tehtävä 2. • Määritellään reaalilukujen \mathbb{R} relaatio \sim asettamalla että $x \sim y$ jos $x - y \in \mathbb{Q}$. Osoita, että \sim on ekvivalenssirelaatio. Määritä luvun $\frac{7}{13}$ ekvivalenssiluokka.

• Vi definierar en relation \sim på \mathbb{R} genom att sätta $x \sim y$ om $x - y \in \mathbb{Q}$. Visa, att \sim är en ekvivalensrelation. Definiera ekvivalensklassen för $\frac{7}{13}$.

• Let us define a relation \sim on \mathbb{R} by setting $x \sim y$ if $x - y \in \mathbb{Q}$. Show that \sim is an equivalence relation. Define the equivalence class of $\frac{7}{13}$.

Pisteytys 2.

(a)-kohta:

- Oikea ideaa ekvivalenssirelaatiosta, 1p.
- refleksiivisyys, 1p.
- symmetrisyys, 1p.
- transitiivisuus, 1p.

- $[\frac{7}{13}]_{\sim} = \{x \in \mathbb{R} : x - \frac{7}{13} \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}$, 1+1p.

Tehtävä on melkein sama kuin Harjoituksen 3 Tehtävä 5.

Tehtävä 3. • (a) Anna esimerkki funktiosta $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, jonka käänteisrelaatio ei ole funktio $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

(b) Anna esimerkki funktiosta $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, joka on surjektio, mutta ei ole injektio.

- (a) Ge ett exempel på en funktion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ men vars inversrelation inte är en funktion $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

(b) Ge ett exempel på en funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, som är en surjektion, men inte en injektion.

- (a) Give an example a function $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ that the converse relation is not a function $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

(b) Give an example of $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, such that f is a surjection but not an injection.

Pisteytys 3.

(a)-kohta:

- Esimerkki joka täytyy ehdot, 1p.
- Osoitettu että funktio, 1p.
- Osoitettu, että käänteisrelaatio ei ole funktio, 1p.
- Esim. $f(x) = 1$.

(b)-kohta:

- Esimerkki joka täytyy ehdot, 1p.
- Osoitettu surjektiivisyys, 1p.
- Osoitettu, että ei ole injektio, 1p.
- Esim. funktio määritelty sopivalla nuolikaaviolla.

Tehtävä 4. • (a) Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Osoita, että $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ ja $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.

(b) Määritä luvun $\frac{3+i}{6-3i}$ reaaliosa ja imaginaariosa.

- (a) Låt $z, w \in \mathbb{C}$. Bevisa, att $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ och $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.

(b) Beräkna den reella och imaginära delen av talet $\frac{3+i}{6-3i}$.

- (a) Let $z, w \in \mathbb{C}$. Show that $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ and $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$.

(b) Calculate the real and imaginary parts of $\frac{3+i}{6-3i}$.

Pisteytys 4.

(a)-kohta:

- Kompleksiluku muodossa $a + bi$, 1p.
- Summa laskettu oikein, 1p.
- Tulo laskettu oikein, 1p.
- Konjugaatin määritelmä oikein, 1p.

(b)-kohta:

- Lavennetaan luvulla $6+3i$ tai käytetään käänteisluvun määritelmää luvulle $6-3i$, 1p.
- $\frac{1}{3} + i\frac{1}{3}$, 1p.