

**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I**  
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Kurssikoe 21.10.2015**

Koeaika on 2,5 tuntia. Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. (a) Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on, jos yhtälöryhmän matriisi saadaan alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\text{i. } \left[ \begin{array}{ccc|c} 7 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{ii. } \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] ?$$

- (b) Kuinka monta ratkaisua on yhtälöryhmällä, jonka kerroinmatriisi on  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ ?

2. (a) i. Selitä omin sanoin, mitä ominaisvektorit ovat. Mitä matriisilla kertominen tekee kyseisen matriisin ominaisvektoreille?  
 ii. Osoita, että  $\bar{v} = (1, -2)$  on matriisin

$$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

ominaisvektori. Mikä on sitä vastaava ominaisarvo?

- (b) Keksi kaksi eri vektoria  $\bar{p} \in \mathbb{R}^2$ , joilla suora  $\{\bar{p} + t(-3, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$  on vektorin virittämä aliavaruus. Perustele vastauksesi.

3. (a) Anna esimerikki vektoreista  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  ja  $\bar{v}_3$ , joille pätevät seuraavat ehdot:

- Jono  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$  on sidottu.
- Mitkään kaksi vektoreista  $\bar{v}_1, \bar{v}_2$  ja  $\bar{v}_3$  eivät ole yhdensuuntaisia.

Perustele vastauksesi.

- (b) Halutaan selvittää virittävätkö vektorit  $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$  ja  $\bar{w}_4$  avaruuden  $\mathbb{R}^3$ . Kun tutkitaan, onko vektori  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  edellä mainittujen vektorien lineaarikombinaatio, päädytään yhtälöryhmään, jonka matriisi saadaan alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -7 & 4 & 0 & -a_1 - 4a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2a_1 - a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 \end{array} \right].$$

Virittävätkö vektorit avaruuden  $\mathbb{R}^3$ ? Selitä päättelysi vaiheet huolellisesti.

4. Oletetaan, että  $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$  ja  $\bar{w} \neq \bar{0}$ . Määritelmän mukaan vektorin  $\bar{v}$  projektio vektorin  $\bar{w}$  virittämälle aliavaruudelle on sellainen vektori  $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ , että

- vektori  $\bar{p}$  on yhdensuuntainen vektorin  $\bar{w}$  kanssa
- vektori  $\bar{v} - \bar{p}$  on kohtisuorassa vektoria  $\bar{w}$  vastaan.

- (a) Yksi seuraavista on projektion  $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$  kaava ja loput eivät. Mikä on oikea kaava? Miksi muut vaihtoehdot eivät käy? Perustele kaikki vastauksesi käyttäen projektion määritelmää.

$$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{v} \quad \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w} \quad (\bar{v} \cdot \bar{w}) \bar{w}$$

- (b) Merkitään  $\bar{v} = (-1, 0, 2)$  ja  $\bar{w} = (2, -2, 2)$ . Määritä projektio  $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ .