Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu 13.11.2014

Jos osallistuit kurssille syksyllä 2014 ja sinulle kertyi lisäpisteitä harjoitusten tekemisestä, kirjoita se selkeästi koepaperin alkuun.

1. Tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (1, -3, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, -4, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$.
   (a) Kirjoita joukon $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ määritelmä.
   (b) Anna kolme esimerkkiä joukon $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ alkioista. Perustele vastauksesi.
   (c) Mikä on aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ dimensio? Perustele vastauksesi dimension määritelmän avulla.

2. (a) Miten määritellään vapaa vektorijono?
   (b) Merkitään $\bar{w}_1 = (-10, -17, -4, -13)$, $\bar{w}_2 = (1, 1, -1, 2)$ ja $\bar{w}_3 = (2, 3, 0, 3)$. Halutaan selvittää, onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa.
   i. Millaista yhtälöä on tutkittava? Mitä yhtälön ratkaisuista pitäisi osoittaa?
   ii. Selitä huolellisesti, millainen yhtälöryhmä yhtälöstä saadaan.
   iii. Kun yhtälöryhmän matriisia muokataan alkeisrivitoimituksilla, saadaan matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   Mitä tämän perusteella voidaan päätellä jonon $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaudesta?

3. (a) Tiedetään, että matriisilla A on ominaisvektori $\bar{v} = (-4, 1)$. Mikä seuraavista vektoreista voisi olla $A\bar{v}$? Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.

$$\bar{a} = (2, -1/2), \qquad \bar{b} = (1, 4), \qquad \bar{c} = (1, 0)$$

   (b) Tiedetään, että matriisilla B on ominaisarvo 3, jota vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (-2, 4, 1, -1)$ ja $\bar{v}_2 = (0, 1, 0, 1)$. Keksi ominaisarvoa 3 vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ kanssa. Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.

4. (a) Erään yhtälöryhmän matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & b & 0 \\ 0 & -2 & a & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

   missä a ja b ovat joitakin reaalilukuja. Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on?
   (b) Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Oletetaan lisäksi että yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on ratkaisu $\bar{x} = (1, 0, -1)$. Onko matriisi A kääntyvä?

5. Oletetaan, että $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että jos $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, niin $||\bar{a} + \bar{b}||^2 = ||\bar{a}||^2 + ||\bar{b}||^2$.

a