Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Erilliskuulustelu 24.5.2016

Koeaika on 3,5 tuntia.

1. Kaverisi tutkii lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $L(1,0) = (4,-2,1)$ ja $L(1,1) = (0,5,1)$. Hän yrittää määrittää kuvauksen matriisia. Kaverisi muistaa, että matrisi saadaan asettamalla kantavektorien kuvavektorit matriisin sarakkeiksi, ja näin hän muodostaa matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Onko kaverisi vastaus oikein, eli onko kyseessä kuvauksen L matriisi? Jos vastaus ei ole oikein, mikä päättelyssä menee väärin?
   (b) Mikä on lineaarikuvauksen L matriisi?
   (c) Määritä kuvauksen L ydin $\operatorname{Ker} L$.

2. Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos $x,\ y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin
$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$
Voidaan osoittaa, että $\mathbb{R}_+$ varustettuna yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$ on vektoriavaruus.
   (a) Mikä on vektoriavaruuden $\mathbb{R}_+$ nollavektori?
   (b) Mikä on vektorin 7 vastavektori -7?

3. Lineaarikuvauksella $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ on ominaisarvot 2 ja -4, joita vastaavat ominaisvektorit $2x^2 + x$ ja $x + 1$. Määritä $L(2x^2 - 2x - 3)$.

4. (a) Onko kuvaus
$$T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad T(a,b,c,d) = (ab, cd)$$
   lineaarinen?
   (b) Jos lineaarikuvauksella $L\colon V \to V$ on ominaisarvo 0, voiko kuvaus L olla bijektio?

5. (a) Matriisiavaruudessa $\mathbb{R}^{2\times 2}$ voidaan määritellä sisätulo kaavalla
$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \right\rangle = aa' + bb' + 2cc' + 2dd'.$$
   Seuraavissa tehtävissä käytetään tätä sisätuloa ja tutkitaan matriiseja
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{sekä} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
      i. Määritä normi $\|A\|$.
      ii. Keksi jokin nollamatriisista poikkeava matriisi, joka on aliavaruuden $W = \operatorname{span}(B)$ kohtisuorassa komplementissa $W^\perp$. Muista perustella vastauksesi.
   (b) Oletetaan, että V on sisätuloavaruus, $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Osoita, että $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos ja vain jos $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = 0$.