Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II

Kurssikoe 19.12.2018

Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Huomaa, että kokeessa on kaksi sivua!

1. (Yht. 15 p.) Tarkastellaan polynomiavaruutta

   $\mathcal{P}_2 = \{p$ on reaalikertoiminen polynomi, joka on korkeintaan astetta 2, tai p on nollapolynom

   Vastaa seuraaviin kysymyksiin, ja perustele väitteesi:

   (a) (5 p) Onko jono $(1-x, 1+x, x^2)$ vapaa $\mathcal{P}_2$:ssa?

   (b) (5 p) Onko jono $(1-x, 1+x, x^2)$ avaruuden $\mathcal{P}_2$ kanta?

   (c) (5 p) Lausu polynomi $4-2x+6x^2$ jonon $(1-x, 1+x, x^2)$ alkioiden lineaarikombinaationa.

2. (Yht. 10 p.)

   Määrittele seuraavat käsitteet:

   (a) Lineaarikuvauksen ominaisarvo.

   (b) Lineaarikuvauksen ominaisvektori.

   (c) Lineaarikuvauksen ydin (eli nolla-avaruus).

   (d) Lineaarikuvauksen kuva–avaruus

   (e) Vektoriavaruuksien välinen isomorfismi

3. (Yht. 15 p.) Olkoon W vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus $W = \text{span}\,((1,0,1),(1,-1,0))$.

   (a) (5 p.) Olkoon $v = (1,2,3)$. Päteekö $v \in W$?

   (b) (10 p.) Määritä vektorin $(0,0,1)$ kohtisuora projektio aliavaruudelle W.

4. (Yht. 20 p.) Tarkastellaan seuraavaa reaalisten 2×2 matriisien muodostamaa joukkoa:

   $$V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}; A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ joillain } a,\, b \in \mathbb{R}.\}$$

   (a) (10 p.) Osoita, että V on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus, ja että vektorit

   $$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   muodostavat sen kannan.

(b) (10 p.) Määritä lineaarikuvauksen

$$L : V \to V, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}$$

matriisi kannan (E_1, E_2) suhteen. Määritä myös (jos mahdollista) sen reaaliset ominaisarvot ja ominiaisvektorit.