HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Kurssikoe 10.12.2008

1. Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja niihin liittyvät ominaisavaruudet.

2. Etsi yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -x_1 + 4x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$$

pienimmän neliösumman ratkaisut. Onko yhtälöryhmällä *ratkaisuja*, eli onko olemassa sellaisia reaalilukuja x_1 ja x_2, jotka toteuttavat yhtälöryhmän?

3. Olkoon $\mathbb{R}^2$ varustettu sisätulolla $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$.

(a) Tutki, ovatko vektorit $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ortogonaaliset sisätulon $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ suhteen.

(b) Määritä sisätulon $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ suhteen ortonormaali $\mathbb{R}^2$:n kanta soveltamalla Gram–Schmidtin menetelmää jonoon $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

4. (a) Olkoot V ja W vektoriavaruuksia ja $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus. Osoita, että jos $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ja $L(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$, missä $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ja $\mathbf{b} \in W$, niin $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}(L)$.

(b) Olkoot $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ja $L_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kaavan $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ määrittelemä lineaarikuvaus. Jos $L_A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ja $\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, niin onko mahdollista, että myös $L_A\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$?