Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin yliopisto
Erilliskuulustelu 30.10.2014

1. (a) Tarkastellaan kuvausta $S\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, jolla $S(A) = a_{11}a_{22}$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Matriisin A kuva-alkio on siis sen lävistäjäalkioiden tulo. Onko S lineaarikuvaus?

   (b) Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, $L(a+bx+cx^2) = (a-b, b+c)$. Mitkä seuraavista polynomeista kuuluvat kuvauksen L ytimeen $\operatorname{Ker} L$?

   i. $1+x$ ii. $x-x^2$ iii. $1+x-x^2$

   Päättele edellisen perusteella, onko L injektio.

2. Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

Voidaan osoittaa, että $\mathbb{R}_+$ varustettuna yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$ on vektoriavaruus.

   (a) Mikä on vektoriavaruuden $\mathbb{R}_+$ nollavektori?

   (b) Mikä on vektorin 7 vastavektori -7?

3. (a) Onko joukko $W = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid ab = 0\}$ avaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus?

   (b) Anna esimerkki polynomiavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruudesta, johon polynomi x^2 kuuluu ja polynomi $x+1$ ei kuulu. Perustele vastauksesi.

4. Selitä lyhyesti, mihin kannanvaihtomatriiseja käytetään. (Sinun ei tarvitse kertoa kannanvaihtomatriisin määritelmää.)

5. (a) Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \{(2a, 3a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$. Keksi kaksi eri vektoria, jotka ovat kohtisuorassa komplementissa $W^\perp$. Perustele vastauksesi.

   (b) Oletetaan, että V on äärellisulotteinen sisätuloavaruus, jolla on ortogonaalinen kanta. Oletetaan lisäksi, että W on avaruuden V aliavaruus ja $\bar{v} \in V$. Osoita, että $\bar{v} \in W$, jos ja vain jos $\operatorname{proj}_W(\bar{v}) = \bar{v}$.

$\frac{\langle w, v \rangle}{\langle w, w \rangle} v$

~~W =~~
W =

~~Span(v) = W~~

Span(v) ⊂ V