

MAT22011 Lineaarialgebra ja matriisilaskenta III

Tentti 4.5.2026

Ratkaise kaikki tehtävät. Muista kirjoittaa ratkaisuihisi riittävästi perusteluja ja välivaiheita. Kokeessa saa olla mukana käsinkirjoitettu A4-liuska muistiinpanoja. Kokeessa ei saa olla laskinta.

1. Tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- (a) Onko matriisi A diagonalisoituva?
- (b) Onko matriisilla A olemassa spektraalihajotelma?
- (c) Onko matriisi B positiivisesti semidefiniitti?
- (d) Onko matriisilla C olemassa polaarihajotelma?

Tehtävässä ei tarvitse muodostaa hajotelmia, vaan riittää perustella niiden olemassaolo. (6p)

- 2. (a) Osoita, että matriisin $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ singulaariarvot ovat 0 ja $\sqrt{a^2 + b^2}$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$. (3p)
- (b) Määritä matriisin

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

spektraalihajotelma.

(3p)

- 3. (a) Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

on ominaisarvo 1. Määritä sitä vastaava yleistetty ominaisavaruus $G(1, A)$. (3p)

- (b) Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiivisesti semidefiniitti ja $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & P \end{bmatrix}$, missä $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m < n$, sekä B, C ja D ovat sopivan kokoisia matriiseja. Osoita, että matriisi P on positiivisesti semidefiniitti. (3p)

- 4. (a) Osoita, että jos $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ on unitaarimatriisi, niin $\|Ux\| = \|x\|$ kaikilla $x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. (3p)
- (b) Olkoon V reaalikertoiminen vektoriavaruus ja $f : V \rightarrow V$ positiivinen operaattori. Olkoot $x, y \in V$ sellaiset, että $f(x) = y$ ja $f(y) = x$. Osoita, että tällöin $x = y$. (Vinkki: Tarkastele vektorin $x - y$ pituutta.) (3p)