OSITTAISDIFFERENTIAALIYHTÄLÖT
KOE
14.6.2012

1. Ratkaise seuraava 1. kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälön alkuarvotehtävä, ja tutki, millä muuttujien arvoilla ratkaisu on olemassa (tässä $u = u(x, y)$):

$$u_y - 2u_x = u \ , \quad u(x,0) = x.$$

2. Ovatko seuraavat ODY:t lineaarisia, semi– tai kvasilineaarisia (ota kantaa kaikkiin vaihtoehtoihin; $u = u(x, y)$):

$$a) \ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sin(x+y), \quad b) \ 2u - u_y + 2u_x u_{yy} + x^2 + y^2 = 0$$

$$c) \ u_y + \sin x \ u_x = e^{-x^2u^2}, \quad d) \ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(x+y).$$

3. Olkoon $v = v(x, t)$, missä $x \in \mathbf{R}$, $t \geq 0$. Ratkaise seuraava aaltoyhtälön Cauchyn probleema:

$$v_{tt} = v_{xx} \ , \quad x \in \mathbf{R} \ , t > 0,$$
$$v(x,0) = \sin x \ , \quad x \in \mathbf{R},$$
$$v_t(x,0) = \cos x \ , \quad x \in \mathbf{R},$$

4. Onko Fredholmin integraaliyhtälöllä

$$\phi(s) - \int_0^{\pi} \sin(t+s)\phi(t)dt = \sin(2s) \ , \quad s \in [0, \pi].$$

ratkaisua?

5. Ovatko seuraavat funktiot harmonisia tasossa tai sen jossakin osa–alueessa ($(x, y) \in \mathbf{R}^2$):

a) $\log(x^2 - y^2)$,

b) $y/(x^2 - y^2)$,

c)) $\int_{-1}^{1}(x^2 - y^2 + t)dt$?

d) $\log((x^2 + y^2)^3)$,