

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Yleistentti, 17.05.2011

1. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$u_t + cu_x + u^2 = 0, \quad u(x, 0) = x^2,$$

missä c on positiivinen vakio.

2. (Laskareista) Oletetaan, että tason avoimessa joukossa $\Delta u(x) + x \cdot \nabla u(x) = 0$, missä $x = (x_1, x_2)$. Osoita, että u :lla ei voi olla aitoja lokaaleja maksimeja.
3. Muotoile ja todista Keskiarvolause tasoalueen harmonisille funktioille.
4. (Laskareista) Olkoon $B = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$. Oletetaan että $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$, u harmoninen B :ssä ja että

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{|x|=r} u(x) = 0.$$

Osoita, että

$$\max_{\bar{B}} u = \max_{|x|=1} u.$$

5. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = t, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$