Helsingin yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Raja-arvot / Gränsvärden
Koe/Prov 21.10.2024
Petteri Harjulehto / Peter Hästö

Kokeessa saa olla mukana käsin kirjoitettu A4-kokoinen muistilappu.

Tehtävä 1.
(a) Olkoon (x_n) lukujono, jolle $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ kun $n \geq 1$. Osoita suoraan määritelmästä, että lukujono (x_n) suppenee kohti lukua 1.
(b) Olkoon (x_n) lukujono, joka suppenee kohti raja-arvoa $x > 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $x_n > 0$ kaikilla $n > m$.

Tehtävä 2. Määritellään

$$A_n = \left\{ \frac{42k}{k+1} : k \geq n \right\}.$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.
(a) Määritä joukon A_n supremum ja infimum.
(b) Tutki suppenevatko lukujonot $(\inf A_n)$ ja $(\sup A_n)$.

Tehtävä 3. Olkoon $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ funktio, jolla on raja-arvo m pisteessä $x_0 \in (0, \infty)$. Osoita, että jos lukujono (y_n) suppenee kohti lukua x_0, niin lukujono $(f(y_n))$ suppenee kohti lukua m.

Tehtävä 4. Sanomme, että funktio on *rajoitetusti heilahteleva* jos se voidaan esittää kahden kasvavan funktion erotuksena. Anna esimerkki rajoitetusti heilahtelevasta funktiosta, joka ei ole monotoninen. Osoita lisäksi, että rajoitetusti heilahtelevalla funktiolla $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ on oikeanpuoleinen raja-arvo välin (a, b) jokaisessa pisteessä.

Helsingfors universitet
Avdelning för matematik och statistik
Raja-arvot / Gränsvärden
Koe/Prov 21.10.2024
Petteri Harjulehto / Peter Hästö

Man får ta med en handskriven A4-storleks minneslapp till provet.

Uppgift 1.
(a) Låt (x_n) vara en talföljd där $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ när $n \geq 1$. Visa direkt från definitionen att talföljden (x_n) konvergerar mot talet 1.
(b) Låt (x_n) vara en talföljd som konvergerar mot gränsvärdet $x > 0$. Visa att det finns ett sådant $m \in \mathbb{N}$, att $x_n > 0$ för alla $n > m$.

Uppgift 2. Definiera

$$A_n = \left\{ \frac{42k}{k+1} : k \geq n \right\}.$$

för alla naturliga tal $n \geq 1$.
(a) Bestäm supremum och infimum av mängden A_n.
(b) Undersök om talföljderna $(\inf A_n)$ och $(\sup A_n)$ konvergerar.

Uppgift 3. Låt $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ vara en funktion som har gränsvärde m vid punkten $x_0 \in (0, \infty)$. Visa att om talföljden (y_n) konvergerar mot talet x_0, så konvergerar talföljden $(f(y_n))$ mot talet m.

Uppgift 4. Vi säger att en funktion har *begränsad variation* om den kan uttryckas som skillnaden mellan två växande funktioner. Ge ett exempel på en funktion med begränsad variation som inte är monoton. Visa dessutom att en funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ med begränsad variation har ett högergränsvärde i varje punkt i intervallet (a, b).