

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Raja-arvot

Tentti

15. 6. 2016

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä. Jätä ensimmäisen sivun yläreunaan tilaa pisteiden merkitsemistä varten.

1. Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{(n + 2)(n + 3)(n + 4)}.$$

Tehtävässä saa käyttää kurssin lauseita sekä tietoja vakiojonon ja jonon $(\frac{1}{n})$ raja-arvoista. Huolellinen perustelu!

2. Oletetaan, että A on epätyhjä ylhäältä rajoitettu joukko reaalilukuja ja, että 3 on joukon A pienin yläraja (eli supremum). Osoita tarkasti määritelmiin nojautuen, että -3 on joukon

$$B = \{-x \mid x \in A\}$$

suurin alaraja (eli infimum).

3. Osoita tarkasti määritelmän perusteella, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n}) = \infty.$$

Raja-arvoja koskevia lauseita ei siis saa käyttää.

4. Osoita tarkasti funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^6 + x^5 + x^2 + x) = 4.$$

Raja-arvoja koskevia lauseita ei siis saa käyttää.

5. Oletetaan, että funktio f toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ehdon $|f(x)| \leq 5$. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien avulla, että yhtälöllä $g(x) = x^3 f(x)$ määritelty funktio on derivoituva kohdassa $x = 0$. (Derivoituvuus kohdassa $x = 0$ tarkoittaa sitä, että funktion erotusosamäärällä

$$\frac{g(x) - g(0)}{x}$$

on raja-arvo.)