



MAT11003/AYMAT11003 Raja-arvot
Moodle-tentti 22.10.2020

Kokeessa saa piirtää funktion kuvaajan ohjelmistolla tai laskimella, mutta muiden apuvälineitä ja kirjallisuuden (esimerkiksi kurssikirjan, luentomateriaalin taulukkokirjan tai internet käyttö, webin) on kielletty. Perustele ratkaisusi huolellisesti. Huom.kuvaajasta saatu vastaus ei riitä perusteluksi missään tehtävässä!

1. Olkoon f reaaliarvoinen funktio

- (a) Esitä raja-arvon $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ määritelmä. (6 pistettä)
(b) Osoita, raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{(x-1)([x] - \frac{1}{2})} = 0,$$

missä

$$[x] = \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$$

kun $x \in \mathbb{R}$. (14 pistettä)

2. Oletetaan, että $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = \frac{3a_n}{1+a_n}$, kun $n \geq 1$. Todista, että lukujonolla $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ on raja-arvo ja määrää se.
3. Oletetaan, että funktio f toteuttaa epäyhtälön

$$\sqrt{x} < f(x) < \sqrt{x+1}$$

jokaiselle $x > 0$.

- (a) Anna esimerkki tällaisesta funktiosta ja perustele vastauksesi. (6 pistettä)
(b) Todista, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

(14 pistettä)

4. Määrää raja-arvon laskusääntöjen perusteella

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}.$$

5. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}.$$

(10 pistettä)

(b) Osoita, että arvoilla $x_0 \neq \frac{1}{2}$ raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ei ole olemassa. (10 pistettä)