HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MAT11003/AYMAT11003 Raja-arvot
Moodle-tentti 22.10.2020

Kokeessa saa piirtää funkiton kuvaajan ohjelmistolla tai laskimella, mutta muiden apuvälineitä ja kirjallisuuden (esimerkiksi kurssikirjan, luentomateriaalin taulukkokirjan käyttö, webin) on kielletty. Perustele ratkaisusi huolellisesti. Huom.kuvaajasta saatu vastaus ei riitä perusteluksi missään tehtävässä!

1. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ reaaliarvoinen funktio, kun $A \subset \mathbb{R}$.

   (a) Esitä raja-arvon $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ määritelmä. (6 pistettä)

   (b) Osoita, raja-arvon määritelmän nojalla

   $$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{(x-1)\left([x]-\frac{1}{2}\right)} = 0,$$

   missä

   $$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$

   kun $x \in \mathbb{R}$. (14 pistettä)

Ratkaisu. (a) Raja-arvo $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ on määritelty, kun on olemassa selallainen $r > 0$, että $(-r, r)\setminus\{0\} \subset A$. (2 pistettä). Lisäksi jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen δ, että

$$|f(x)| = |f(x) - 0| < \varepsilon \quad \text{(2 pistettä)}$$

aina, kun $0 < |x| = |x - 0| < \delta$.(2 pistettä).

(b). Olkoon $|x| < \frac{1}{2}$ (järkevä alkuraja 2 pistettä). Tällöin $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Siis

$$[x] = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{kun } -\frac{1}{2} < x < 0. \end{cases} \quad \text{(pisteytys 1+1)}$$

Kun $|x| < \frac{1}{2}$, niin

$$\frac{|x|}{(x-1)\left([x]-\frac{1}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{2x}{1-x}, & \text{kun } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{2|x|}{3(1-x)}, & \text{kun } -\frac{1}{2} < x < 0. \end{cases} \quad \text{.(pisteytys 2+2)}$$

ja

$$\frac{|x|}{\left|(x-1)\left([x]-\frac{1}{2}\right)\right|} \leq \frac{2|x|}{1-x} \leq 4|x| \quad \text{(järkevä yläraja + perustelu 2p.)}$$

sillä $1 - x > \frac{1}{2}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ (δ valinta 2).Tällöin

$$\frac{|x|}{\left|(x-1)\left([x]-\frac{1}{2}\right)\right|} \leq 4\,|x| < \varepsilon$$

aina kun $0 < |x| < \delta$ (loppuperustelut 2p).

2. Oletetaan, että $a_1 = 1$ ja $a_{n+1} = \frac{3a_n}{1+a_n}$, kun $n \geq 1$. Todista, että lukujonolla $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ on raja-arvo ja määrää se.

   Ratkaisu: Osoitetaan induktiolla, että jono (a_n) aidosti kasvava ja aidosti positiivinen eli $0 < a_n < a_{n+1}$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Alkuaskel on voimassa (alkuaskel + perustelu 2p) , sillä

$$0 < a_1 = 1 < \frac{3}{2} = \frac{3a_1}{1+a_1} = a_2.$$

   Tehdään induktio-oletus: $0 < a_k < a_{k+1}$jollekin $k = n \in \mathbb{N}_1$. Tällöin induktio oletuksen mukaan $0 < a_n < a_{n+1}$,joten järjestysominaosuuksien nojalla

$$0 < \frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_n}$$

   ja

$$-\frac{1}{a_n} < -\frac{1}{a_{n+1}},$$

   joten

$$a_{n+2} = \frac{3a_{n+1}}{1+a_{n+1}} = 3 - \frac{3}{1+a_{n+1}} > 3 - \frac{3}{1+a_n} = \frac{3a_n}{1+a_n} = a_{n+1} > 0.$$

   Siis induktioväite on voimassa kun $k = n+1$. Siis induktioperiaatteen nojalla

$$0 < a_k < a_{k+1}$$

   jokaiselle $k \in \mathbb{N}_1$. (Induktio todistus:alkuaskel 2, indunktio-oletus 2, induktio väitteen todistus perusteluineen 6).Tällöin

$$a_{k+1} = 3 - \frac{3}{1+a_k} < 3,$$

   jokaiselle $k \geq 1$. Koska $a_1 = 1 < 3$, niin $0 < a_k < 3$ jokaiselle $k \in \mathbb{N}_1$. Siis lukujono (a_n) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joten monotonisen konvergenssilauseen nojalla se suppenee (yläraja +todistus 4) Merkitään $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Koska

$$a_{n+1} = \frac{3a_n}{1+a_n}$$

ja $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ on jonon (a_n) osajono, niin se suppenee ja $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. Tällöin raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{3\lim_{n\to\infty} a_n}{1+\lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{3a}{1+a} \text{(perusteluineen 4)}$$

Koska $a > a_1 = 1$, niin

$$a\,(1+a) = 3a$$

ja

$$1 + a = 3,$$

mistä seuraa $a = 2$. Siis $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.(ratkaisu perusteluineen 2p)

3. Oletetaan, että funktio f toteuttaa epäyhtälön

$$\sqrt{x} < f(x) < \sqrt{x+1}$$

jokaiselle $x > 0$.

   (a) Anna esimerkki funktiosta, joka toteuttaa edellisen ominaisuuden ja perustele vastauksesi. (6 pistettä)

Ratkaisu: esim funktio

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

toteuttaa ehdot,sillä kun $x > 0$, niin $x < x+1$ ja

$$x + 1 - x = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) > 0,$$

joten $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} > 0$, sillä $\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0$. Siis

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} > \frac{2\sqrt{x}}{2} = \sqrt{x} \\ f(x) &= \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} < \frac{2\sqrt{x+1}}{2} = \sqrt{x+1}. \end{aligned}$$

(Esimerkki funktiosta 2 pistettä ja todistuksesta 2+2 pistettä).

   b. Todista, että

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x+1) - f(x)\right) = 0.$$

   (14 pistettä)

Ratkaisu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\sqrt{x} < f(x) < \sqrt{x+1}$ (2 pistettä), niin

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} \leq f(x+1) - f(x) \\ &< \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

(Molemmista epäyhtälöistä oikein laskettuna 2+2). Voi myös käyttää itseisarvoa, sillä

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+1} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} \leq f(x+1) - f(x) \leq \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Siis

$$f(x+1) - f(x) = |f(x+1) - f(x)| < \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \overset{\sqrt{x+1}>0}{<} \frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$$

kun $\frac{1}{\varepsilon^2} < x$. (itseisarvot 2+arvio 2 ja ehto 2). Määritelmän nojalla (2 pistettä)

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

4. Määrää raja-arvon laskusääntöjen perusteella raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}.$$

Ratkaisu: Lauseke $\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$ on määritelty kun $\sin x \neq 0$ eli esim kun $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ (3p). Koska $1 + \cos x \neq 0$, kun $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$(1p),niin voimme kertoa

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin^2 x\,(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x\,(1+\cos x)}. \text{ (4p)}$$

Koska

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x, \text{ (2p)}$$

ja $\sin x \neq 0$, niin

$$\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{1+\cos x}.\text{(4p)}$$

kun $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Koska $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ (ei tarvitse tosistaa 2p), niin raja-arvon laskusääntöjen nojalla

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \text{ (4p)}$$

Huomautus: kaava $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ olisi pitänyt todistaa, sen käyttäminen toi 10p, jos perusteli oikein. L'Hospitalin säännön käyttö toi 0-pistettä, koska se olisi pitänyt myös todistaa ja samoin derivointisäännöt.

5. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Osoita, että

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}.$$

(10 pistettä)

Ratkaisu: Lasketaan funktio seuraavasti

$$f(x) - \frac{1}{2} = \begin{cases} x - \frac{1}{2}, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - x, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \text{(2p)}$$

Siis

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| x - \frac{1}{2} \right| . \text{(2p)}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ (1p). Valitaan $\delta = \varepsilon$. (2p). Tällöin

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \text{ (1p)}$$

aina kun $0 < \left| x - \frac{1}{2} \right| < \delta$ (1). Siis raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2}.\text{(perustelu, loppu 1 p)}$$

b. Osoita, että arvoilla $x_0 \neq \frac{1}{2}$ raja-arvoa $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ei ole olemassa. (10 pistettä)

Ratkaisu. Olkoon $x_0 \neq \frac{1}{2}$. Koska $x_0 < x_0 + \frac{1}{n}$, on olemassa rationaaliluku x_n siten, että

$$\sqrt{2} x_0 < q_n < \sqrt{2} x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n},$$

joten

$$x_0 < \frac{q_n}{\sqrt{2}} < x_0 + \frac{1}{n}.\text{(2 p , myös suoraan irraionaaliluku ok)}$$

Samoin on olemassa sellainen rationaaliluku y_n että

$$x_0 < y_n < x_0 + \frac{1}{n}.\text{(2 p),}$$

koska reaalilukujen välissä on rationaaliluku. Kuristusperiaatteen nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{\sqrt{2}} = x_0 = \lim_{n\to\infty} y_n = x_0. \text{ (2p)}$$

Luku $x_n = \frac{q_n}{\sqrt{2}}$ on irrationaaliluku, sillä $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Siis määritelmän nojalla

$$f(x_n) = 1 - x_n$$

ja

$$f(y_n) = y_n,$$

joten raja-arvon laskusäännöistä saadaan

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (1 - x_n) = 1 - x_0$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} (y_n) = x_0.\text{(2p)}$$

Oletuksesta $x_0 \neq \frac{1}{2}$ seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 - x_0 \neq x_0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Siis raja-arvoa $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ei ole olemassa, kun $x_0 \neq \frac{1}{2}$, koska raja-arvo on a jos ja vain jos jokaiselle pistettä x_0 kohti suppenevalle jonolle (z_n) pätee $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$. (2 p.)