Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Erilliskoe 3h30min
17.5.2017

1. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $0 < f(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq 1.$$

2. Olkoon $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ja $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva, kompaktikantajainen funktio. Osoita, että konvoluutio $f*g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on tasaisesti jatkuva.

3. (a) Määrittele käsite: Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Vitalin peite.
(b) Olkoon $\mu\colon \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ sellainen mitta, että

$$m\big(\bar{B}^n(x,r)\big) \leq \mu\big(\bar{B}^n(x,r)\big)$$

kaikilla $\mathbb{R}^n$:n suljetuilla kuulilla $\bar{B}^n(x,r)$. Osoita, että

$$m(U) \leq \mu(U)$$

jokaisella avoimella joukolla $U \subset \mathbb{R}^n$.

4. (a) Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio.
(b) Muotoile Hardy-Littlewoodin lause avaruuden $L^1(\mathbb{R}^n)$ funktioille.
(c) Hardy-Littlewoodin lauseen todistus perustuu erääseen peitelauseeseen. Muotoile tämä lause.
[Huom.: Kohtien (b) ja (c) lauseita ei tarvitse todistaa.]

5. Olkoon $f\colon [0,1] \to [0,2]$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(1+\sin(1/x)\big), & \text{jos } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

ja $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.
(a) Osoita, että f ja g ovat absoluuttisesti jatkuvia.
(b) Osoita, ettei $g \circ f$ ole rajoitetusti heilahteleva.

Svenskspråkig version på motstående sida!

Institutionen för matematik och statistik
Reell analys I
Slutförhör 3h30min
17.5.2017

1. Låt $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ vara en mätbar funktion och $0 < f(x) < \infty$ för nästan varje $x \in [0,1]$. Visa att

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq 1.$$

2. Låt $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ och låt $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion med kompakt stöd. Visa att konvolutionen $f * g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ är likformigt kontinuerlig.

3. (a) Ge definitionen av Vitalis övertäckning av en mängd $A \subset \mathbb{R}^n$.
(b) Låt $\mu\colon \mathrm{Bor}\mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ vara en mått, så att

$$m\big(\bar{B}^n(x,r)\big) \leq \mu\big(\bar{B}^n(x,r)\big)$$

för varje sluten kula $\bar{B}^n(x,r) \subset \mathbb{R}^n$. Visa att

$$m(U) \leq \mu(U)$$

for varje öppen mängd $U \subset \mathbb{R}^n$.

4. (a) Ge definitionen av Hardy-Littlewoods maximalfunktion Mf, då $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ är en lokalt integrerbar funktion.
(b) Formulera Hardy-Littlewoods sats för funktioner i rummet $L^1(\mathbb{R}^n)$.
(c) Beviset av Hardy-Littlewoods sats baserar sig på en viss övertäckningssats. Formulera denna sats.
[Obs.: Satserna i delarna (b) och (c) behöver inte bevisas.]

5. Låt $f\colon [0,1] \to [0,2]$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(1+\sin(1/x)\big), & \text{om } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{om } x = 0, \end{cases}$$

och $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.
(a) Visa att f och g är absolut kontinuerliga.
(b) Visa att $g \circ f$ inte är av begränsad variation.

Suomenkielinen versio kääntöpuolella!