Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Erilliskoe 3h
7.8.2019

1. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja $f_k \in L^p(X)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, sellainen jono, että raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$$

on olemassa μ-m.k. $x \in X$ ja

$$\liminf_{k \to \infty} \|f_k\|_p = a < \infty.$$

Osoita, että $f \in L^p(X)$ ja $\|f\|_p \leq a$.

2. Olkoon $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mitallinen ja $0 < f(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq 1.$$

3. Olkoon $1 \leq p \leq q < \infty$ ja $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen siten, että $0 < m(A) < \infty$. Osoita, että

$$\left(\frac{1}{m(A)}\int_A |f|^p dm\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{m(A)}\int_A |f|^q dm\right)^{1/q}$$

kaikilla $f \in L^q(A)$.

4. (a) Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio.
(b) Osoita, että $Mf(x) < \infty$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ aina kun $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

5. Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ absoluuttisesti jatkuva, $1 < p < \infty$ ja $f' \in L^p([a,b])$. Osoita, että on olemassa $C \in \mathbb{R}$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

kaikilla $x, y \in [a,b]$, missä $\alpha = 1 - 1/p$.

[In English overleaf.]

Department of Mathematics and Statistics
Real Analysis I
Final exam, 3h
7.8.2019

1. Let (X, Γ, μ) be a complete measure space and $f_k \in L^p(X)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, a sequence such that the limit

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

exists for μ-a.e. $x \in X$ and

$$\liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p = a < \infty.$$

Prove that $f \in L^p(X)$ and $\|f\|_p \leq a$.

2. Let $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ be measurable and $0 < f(x) < \infty$ for almost every $x \in [0,1]$. Prove that

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right) \geq 1.$$

3. Let $1 \leq p \leq q < \infty$ and $A \subset \mathbb{R}^n$ a measurable set such that $0 < m(A) < \infty$. Prove that

$$\left(\frac{1}{m(A)}\int_A |f|^p dm\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{m(A)}\int_A |f|^q dm\right)^{1/q}$$

for every $f \in L^q(A)$.

4. (a) Define the Hardy-Littlewood maximal function Mf of a locally integrable function $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.
(b) Prove that $Mf(x) < \infty$ for almost every $x \in \mathbb{R}^n$ whenever $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

5. Let $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ be absolutely continuous, $1 < p < \infty$, and $f' \in L^p([a,b])$. Prove that there exists a constant $C \in \mathbb{R}$ such that

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$$

for all $x, y \in [a,b]$, where $\alpha = 1 - 1/p$.

[Suomenkieliset tehtävät kääntöpuolella.]