Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Reaalianalyysi I
Loppukoe
10.5.2011

1. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja $f_k \in L^p(X)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, sellainen jono, että raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$$

on olemassa μ-m.k. $x \in X$ ja

$$\liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p = a < \infty.$$

Osoita, että $f \in L^p(X)$ ja $\|f\|_p \le a$.

2. Olkoon (X, Γ, μ) täydellinen mitta-avaruus ja $p_1, p_2 \in [1, \infty)$. Oletetaan, että $f_k \in L^{p_1}(X) \cap L^{p_2}(X)$, $k \in \mathbb{N}$, ja $f_k \to g$ avaruudessa $L^{p_1}(X)$ ja $f_k \to h$ avaruudessa $L^{p_2}(X)$. Osoita, että $g = h$ μ-m.k.

3. (a) Anna Hardy-Littlewood maksimaalifunktion Mf määritelmä, kun $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ on lokaalisti integroituva funktio.
(b) Osoita, että $Mf\colon \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ on mitallinen funktio.

4. (a) Määrittele käsite: Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ Vitalin peite.
(b) Olkoon $\mu\colon \operatorname{Bor}\mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ sellainen mitta, että

$$m\big(\bar{B}^n(x,r)\big) \le \mu\big(\bar{B}^n(x,r)\big)$$

kaikilla $\mathbb{R}^n$:n suljetuilla kuulilla $\bar{B}^n(x,r)$. Osoita, että

$$m(U) \le \mu(U)$$

jokaisella avoimella joukolla $U \subset \mathbb{R}^n$.

5. Olkoon $f\colon [0,1] \to [0,2]$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(1 + \sin(1/x)\big), & \text{jos } 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

ja $g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.
(a) Osoita, että f ja g ovat absoluuttisesti jatkuvia.
(b) Osoita, ettei $g \circ f$ ole rajoitetusti heilahteleva.