

**Johdatus tilastolliseen päättelyyn**  
**Kurssikoe 15. 6. 2015**

**Huom. Kokeessa saa käyttää laskinta ja kaksipuolista A4-kokoista käsinkirjoitettua ”lunttilappua”. Omia taulukoita ja kaavakirjoja ei saa käyttää. Tarvittava taulukko on ohessa.**

1. Poimitaan satunnaisotos (kolme riippumatonta havaintoa) eksponenttijakaumasta, jonka tiheysfunktio on

$$g(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y > 0,$$

ja jossa  $\lambda > 0$  on tuntematon parametri. Kirjoita havainnot  $y_1 = 4.1$ ,  $y_2 = 4.8$  ja  $y_3 = 3.1$  vastaava uskottavuusfunktio ja johda huolellisesti perustellen  $\lambda$ :n suurimman uskottavuuden estimaatti.

2. a) Erään kaupungin vuokrayksien vuokratasoa selvitettiin satunnaisotoksella, jonka koko oli 25. Otoksessa keskimääräinen kuukausivuokra oli 440 euroa ja vuokrien keskijakoa 45 euroa. Muodosta 95 %:n luottamusväli kaupungin yksien keskimääräiselle vuokratasolle, kun oletetaan, että vuokrien vaihtelut ovat (likimain) normaalisti jakautuneita.

b) Onko oikein sanoa, että noin 95 % koko kaupungin yksien kuukausivuokrista sijoittuu ko. luottamusvälille? Perustelee.

3. (”teoriatehtävä”) Havainnot  $y_1, \dots, y_n$  ovat peräisin mallista, jossa vastaavat satunnaismuuttujat  $Y_1, \dots, Y_n$  ovat satunnaisotos normaalijakaumasta  $N(\mu, \sigma^2)$ . Testataan nollahypoteesia  $H_0: \mu \leq \mu_0$ , kun vastahypoteesi on  $H_1: \mu > \mu_0$  ja  $\mu_0$  on tunnettu reaaliluku. Kurssilla on opittu, että testaus perustuu testisuureeseen

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s/\sqrt{n}},$$

jossa  $\bar{y}$  on havainnoista laskettu otoskeskiarvo ja  $s$  niiden keskijakoa.

a) Miten määritellään ja lasketaan testin  $p$ -arvo (esim. sopivaa taulukkoa tai tietokoneohjelmaa käyttäen)?

b) Miten menetellään, jos halutaan tehdä päätös  $H_0$ :n hyväksymisestä tai sen hylkäämisestä ja  $H_1$ :n hyväksymisestä merkitsevyydellä  $\alpha = 0.01$ ?

c) Millaiset virhemahdollisuudet päätöksentekoon liittyvät: mitä nimityksiä niistä käytetään ja milloin ne tarkalleen ottaen esiintyvät?

4. Esillä on kolme identtistä kulhoa, joista kussakin on viisi palloa:

- kulhossa yksi on neljä valkoista ja yksi musta pallo
- kulhossa kaksi on kaksi valkoista ja kolme mustaa palloa
- kulhossa kolme on viisi mustaa palloa.

Yksi kulhoista valitaan umpimähkään, mutta valitun kulhon numeroa  $\theta$  (joka on 1, 2 tai 3) ei paljasteta, vaan se on tuntematon parametri. Valitusta kulhosta nostetaan umpimähkään kaksi palloa siten, että ensiksi nostettu pallo palautetaan kulhoon ennen toista nostoa. Molemmat nostetut pallot ovat valkoisia. Esitä parametrin  $\theta$  priorijakauma, uskottavuusfunktio ja posteriorijakauma (niiden arvot luettelemalla).

**Taulukko:**  $t_\nu$ -jakauman  $u$ -yläkvantiileja  $t_\nu(u)$ , joille  $u = P(X > t_\nu(u))$ , kun  $X \sim t_\nu$ .  
Tässä  $\nu$  on jakauman vapausasteluku ja  $t_\infty$  tarkoittaa standardinormaalijakaumaa  $N(0, 1)$ ,  
jolloin on tapana merkitä  $t_\infty(u) = z_u$ .

$\nu \backslash u$	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
45	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281
50	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261
$\infty$	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090