

MAT22014 Tilastollinen päättely Iib

Tentti 29.3.2023

Tentissä saa olla mukana ainoastaan kirjoitusvälineet.

- (a) Selitä mitä tarkoitetaan tyhjentävällä tunnusluvulla (määritelmä, merkitys, tulkinta).
- (b) Olkoon X_1, \dots, X_n is riippumaton satunnaisotos Laplace-jakaumasta, jonka tiheysfunktio on

$$f(x; \theta) = \frac{1}{2\theta} \exp\left(-\frac{|x|}{\theta}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta > 0.$$

Etsi yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku parametrille θ .

- Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \sim N(0, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$. Onko hypoteesille $H_0 : \sigma^2 = 1$ vs. $H_1 : \sigma^2 > 1$ olemassa tasaisesti voimakkain testi? Perustele vastauksesi. Laadi kyseisenlainen testi, mikäli sellainen on olemassa.
- Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat Y_1, \dots, Y_n ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \theta) = \theta^{-2} y \exp(-y/\theta), \quad y > 0,$$

jossa θ on positiivinen parametri. Kysymyksessä on gammajakauman erikoistapaus. Integroimalla nähdään, että $E(Y_i) = 2\theta$ ja $\text{Var}(Y_i) = 2\theta^2$. Johda uskottavuusosamäärän testi, Waldin testi ja pistemäärätesti nollahypoteesille $H_0 : \theta = \theta_0$ kaksisuuntaista vaihtoehtoa $H_1 : \theta \neq \theta_0$ vastaan.

- Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\mathcal{Y}}(\mathbf{y}; \theta)$, jossa parametri θ on reaalinen.
 - Mitä tarkotetaan parametrin θ luottamusvälillä?
 - Miten määritellään parametrin θ uskottavuusväli?
 - Mikä approksimatiivinen yhteys on uskottavuusvälillä ja luottamusvälillä, kun luottamustasoksi on valittu 95% ja malli oletetaan kyllin säännölliseksi?

Muistin tueksi

Jos X noudattaa $N(\mu, \sigma^2)$ -jakaumaa, niin sen tiheysfunktio on

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$