Matemaattisten tieteiden kandiohjelma / MTO

Tilastollinen päättely II

1. kurssikoe 7.3.2019 (kesto 2h 30min)

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu.

1. Olkoon θ positiivinen parametri, ja asetetaan

$$f(y;\theta) = \begin{cases} 2\theta^{-1} y \exp(-y^2/\theta), & \text{kun } y > 0 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin yllä mainittua jakaumaa. Muodosta tämän mallin uskottavuusfunktio sekä määritä suurimman uskottavuuden estimaatti $\widehat{\theta}$. Mikä on parametrin $\mu = \theta^4 + 2\theta$ suurimman uskottavuuden estimaatti?

2. Olkoon $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (1, 2, 2, 1)$. Olkoon Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 neljä riippumatonta eksponenttijakautunutta satunnaismuuttujaa ja $Y_i \sim \mathrm{Exp}(t_i/\mu)$ missä $\mu > 0$. Laske mallin Fisherin informaatio $i(\mu)$ parametrille μ. Olkoon

$$T = \frac{aY_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + Y_4}{2} \quad \text{ja} \quad U = \frac{2Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 + 2Y_4}{3}.$$

Näytä, että U on parametrin $g(\mu) = 2\mu$ harhaton estimaattori ja määrää sellainen luku $a > 0$, jolla myös T on parametrin $g(\mu)$ harhaton estimaattori. Onko jompikumpi harhattomista estimaattoreista parametrin $g(\mu)$ täystehokas estimaattori?

3. Teoriakysymys: Tilastollisen mallin parametri on $\boldsymbol{\theta}$, ja estimoitavana on sen reaalinen funktio eli muunnos $g(\boldsymbol{\theta})$. Selosta lyhyesti (mutta kuitenkin täsmällisesti), miten määritellään estimaattorin T a) harhattomuus ja asymptoottinen harhattomuus b) keskineliövirhe c) tehokkuus ja täystehokkuus.

4. Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n$ $\perp\!\!\!\perp$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja kunkin Y_i:n tiheysfunktio on

$$f(y;\theta) = 3y^2\theta^{-2}\mathbf{1}\{\, y > 0 \,\} \exp\left(-y^3/\theta^2\right)$$

ja parametri $\theta > 0$. Etsi jokin 1-ulotteinen parametrin θ tyhjentävä tunnusluku $t(\mathbf{y})$, kun aineisto $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Laske lisäksi parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaatti $\widehat{\theta}$. Onko suurimman uskottavuuden estimaatti tunnusluvun t muunnos, eli löytyykö sellaista funktiota g, jolla $\widehat{\theta}(\mathbf{y}) = g(t(\mathbf{y}))$?

Jakaumia:

- Satunnaismuuttuja $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ noudattaa gammajakaumaa parametreilla $\kappa > 0$, $\lambda > 0$. Sen tiheysfunktio on

$$f_X(x; \kappa, \lambda) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}\{ x > 0 \},$$

  odotusarvo $\mathbb{E}X = \kappa/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} X = \kappa/\lambda^2$. Riippumattomien gammajakautuneitten $X_i \sim \mathrm{G}(\kappa_i, \lambda)$ summa on gammajakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{G}(\sum \kappa_i, \lambda)$. Jos $X \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda)$ ja $c > 0$ vakio, niin $cX \sim \mathrm{G}(\kappa, \lambda/c)$.

- Satunnaismuuttuja $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ noudattaa eksponenttijakaumaa parametrilla $\lambda > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{G}(1, \lambda)$, ja sen tiheysfunktio on

$$f_Y(y; \lambda) = \lambda e^{-\lambda y} \mathbf{1}\{ y > 0 \},$$

  odotusarvo $\mathbb{E}Y = 1/\lambda$ ja varianssi $\operatorname{var} Y = 1/\lambda^2$. Eksponenttijakauman kertymäfunktio $F_Y(y) = (1 - e^{-\lambda y})\mathbf{1}\{ y > 0 \}$.

- Satunnaismuuttuja $Z \sim \chi^2_n$ noudattaa khiin neliön jakaumaa vapausasteella $n > 0$. Tämä on gammajakauman erikoistapaus $\chi^2_n = \mathrm{G}(n/2, 1/2)$ ja sen tiheysfunktio on siten

$$f_Z(z; n) = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} z^{n/2-1} e^{-z/2} \mathbf{1}\{ z > 0 \},$$

  odotusarvo $\mathbb{E}Z = n$ ja varianssi $\operatorname{var} Z = 2n$.

- Satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{Tas}(a, b)$ noudattaa tasajakaumaa välillä (a, b), missä $b > a$. Sen tiheysfunktio on

$$f_W(w; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{kun } a < w < b \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

  Odotusarvo $\mathbb{E}W = \frac{1}{2}(a + b)$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \frac{1}{12}(b - a)^2$.

- Diskreetti satunnaismuuttuja $W \sim \mathrm{P}(\mu)$ noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla μ. Sen pistetodennäköisyysfunktio on

$$f_W(w; \mu) = \begin{cases} e^{-\mu} \mu^w / w!, & \text{kun } w = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

  Odotusarvo $\mathbb{E}W = \mu$ ja varianssi $\operatorname{var} W = \mu$. Riippumattomien Poisson-jakautuneitten satunnaismuuttujien $X_i \sim \mathrm{P}(\mu_i)$ summa on Poisson-jakautunut $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathrm{P}(\sum \mu_i)$.